COURSE NOTES 2026 Spring

微分几何

Differential Geometry

Runkun Liu

Nankai University

目录

记号与阅读约定 **iii**

第一章 Euclid 空间与刚性运动 **1**
1.1 绪论 . . . 1
1.2 运动 . . . 1
1.3 向量 . . . 2

第二章 曲线论 **4**
2.1 参数曲线 . . . 4
2.2 弧长参数 . . . 5
2.3 曲线的局部方程 . . . 7
2.4 曲线的曲率与挠率 . . . 9
2.5 Frenet 公式 . . . 11
2.6 曲线论基本定理 . . . 15
2.7 平面曲线的整体性质 . . . 17

第三章 曲面的局部性质 **21**
3.1 曲面与参数曲面片 . . . 21
3.2 切平面与法方向 . . . 22
3.2.1 微分、余切空间与一阶近似 . . . 24
3.3 第一基本形式 . . . 25
3.4 第二基本形式 . . . 28
3.5 法曲率函数 . . . 31
3.6 曲面在一点处的标准展开 . . . 35
3.7 结构方程 . . . 36
3.7.1 球面像与第三基本形式 . . . 37
3.8 特殊曲面 . . . 38
3.9 保长对应与保角对应 . . . 40

第四章 曲面论基本定理 **42**
4.1 外微分式 . . . 42
4.1.1 交替形式与外乘法 . . . 42
4.1.2 曲面上的形式与外微分 . . . 44
4.2 幺正活动标架 . . . 45
4.3 基本形式与 Gauss 曲率 . . . 47
4.4 曲面论基本定理 . . . 48

第五章 曲面上的曲线 **52**

5.1 测地曲率与测地挠率 52
5.2 曲面上的特殊曲线 54
5.3 Gauss–Bonnet 公式 56
5.4 联络 58
5.5 测地线 61
5.6 平行与平行移动 63
5.7 法坐标系与测地极坐标系 65
5.7.1 局部最短性质与凸邻域 66
5.8 可展曲面 67

第六章 高维 Euclid 空间的曲面 **70**
6.1 高维曲面 70
6.2 微分流形 73
6.2.1 由曲线定义切空间 74

附录 A 适用条件速查 **76**
A.1 常用结论的条件与边界 76
A.2 教材与记号对应 77

记号与阅读约定

本笔记以孟道骥、梁科《微分几何》第三版为主线，以陈维桓《微分几何》第二版补充解释与证明。正文沿用原笔记的问题与推导相衔接的写法。

空间中的位置向量记为 P, 曲线的弧长参数记为 s, 曲率、挠率分别记为 κ, τ, Frenet 标架记为 T, N, B。曲面的单位法向量记为 n；第一、第二基本形式记为 I, II，系数分别为 E, F, G 与 L, M, N。第二基本量 N 与曲线主法向量 N 依对象区别。

除非另作说明，讨论的曲线与曲面至少三次连续可微；需要更高阶微分时明确补充光滑性。Frenet 标架与经典挠率公式只在 $\kappa > 0$ 处使用。

对参数化 $P : D \to S$，$q = (u, v) \in D$ 是参数点，$p = P(q) \in S$ 是曲面上的点。$\mathrm{d}P_q$ 是线性映射，$\mathrm{d}P_q(a, b) = aP_u + bP_v$ 才是切向量；$\mathrm{d}u, \mathrm{d}v$ 是坐标微分，求值后才得到实数分量。

“在曲面的一个点处”涉及局部命题；“曲面上处处”涉及全局条件。定向、坐标邻域和非零分母的假设均在需要时明确说明。

第一章　Euclid 空间与刚性运动

1.1　绪论

几何学关心图形在某类变换下保持不变的性质。Euclid 几何研究刚性运动下不变的长度与角度，解析几何用坐标描述图形，微分几何则借助微积分研究一般曲线与曲面的局部形状，并进一步考察局部性质怎样制约整体。

同一条曲线可以有不同的参数方程，我们首先想问：怎样从这些方程中提取只反映形状的量？引入曲率与挠率后，我们还会反过来问：能否只通过曲率和挠率确定唯一的一条曲线？对曲面，我们也会提出类似的问题：已知第一、第二基本形式，能否找到以它们为基本形式的曲面？这样的曲面是否唯一？

曲面还带来一个新的区别：圆柱可以局部展开成平面，空间形状改变了，曲面内的长度与夹角却保持不变。因此我们也要逐步分清，哪些量描述曲面在空间中的弯曲，哪些量只由曲面内部的测量决定。活动标架将帮助我们把这些问题写成微分方程，外微分式则用于整理方程之间的兼容条件。

为讨论“不变量”，先明确允许怎样移动图形，并整理后面测量长度、夹角和定向所需的向量运算。

1.2　运动

在三维 Euclid 空间 $E=\mathbb{R}^3$ 中，取直角坐标，将点的坐标记为列向量 X。考虑仿射变换 $X\mapsto AX+B$；平移项在作差时消失，所以是否保持距离完全由 A 决定。

命题 1.2.1 (保持距离的仿射变换)**.** 变换 $X\mapsto AX+B$ 保持任意两点的距离，当且仅当 $A^TA=I$。

证明. 距离不变等价于对所有 $V\in\mathbb{R}^3$ 有 $\|AV\|^2=\|V\|^2$，即 $V^T(A^TA-I)V=0$。取标准基向量以及两个标准基向量之和，得到对称矩阵 A^TA-I 的全部元素为零。反向直接代入即可。 □

因此，正交矩阵给出的仿射变换恰好是所需的刚性移动。行列式还可以区分是否保持空间的定向。

定义 1.2.2 (运动与固有运动)**.** 称 $X\mapsto AX+B\,(A\in O(3))$ 为一个**运动**。当 $\det A=1$ 时称为**固有运动**；当 $\det A=-1$ 时称为非固有运动。$A=I$ 时是平移，$B=0$ 时是正交变换；$B=0$ 且 $\det A=1$ 时是转动。

例如 $(x,y,z)\mapsto(x,y,-z)$ 是非固有运动。它保持长度和角度，却会反转右手系的定向；这一差别将在挠率的变换中出现。

复合两个运动仍是运动。将点添上最后一个坐标 1，可以同时记录其线性部分和平移部分：

$$\begin{pmatrix} X' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}.$$

这一表示也直接给出运动的群结构。

命题 1.2.3 (运动群及其子群)**.** 全体运动构成群，其复合与逆为

$$(A,B)(C,D) = (AC, AD+B), \qquad (A,B)^{-1} = (A^{-1}, -A^{-1}B).$$

固有运动构成指数为 2 的正规子群；平移构成正规子群；正交变换与转动分别构成子群 $O(3)$ 与 $SO(3)$。

证明. 公式由复合映射得到，单位元是 $(I,0)$。映射 $(A,B) \mapsto \det A$ 是到 $\{\pm 1\}$ 的满同态，其核为固有运动群。又

$$(A,B)(I,D)(A,B)^{-1} = (I, AD),$$

故平移群正规。固定原点的运动恰好满足 $B=0$，其中保持定向者恰好满足 $A \in SO(3)$。 □

1.3 向量

点的位置会随平移改变，但两点之间的位移不变。因此可以把相差一个共同平移的有序点对看作同一个对象。

定义 1.3.1 (向量)**.** 在 $E \times E$ 上规定 $(P,Q) \sim (P',Q')$，当且仅当存在平移同时把 P,Q 送到 P',Q'。等价类 $\overrightarrow{PQ}$ 称为**向量**，其坐标为 $Q-P$。选定原点 O 后，$\overrightarrow{OP}$ 称为点 P 的位置向量。

等价关系的自反性、对称性与传递性分别由恒等平移、逆平移和复合平移得到。向量的加法和数乘对应其坐标的通常运算；运动 $X \mapsto AX+B$ 在向量上诱导 $V \mapsto AV$。

后文要测量切向量之间的长度与角度，也要给标架选定方向，因而需要内积、混合积和向量积。

定义 1.3.2 (内积、混合积与向量积)**.** 对 $U,V,W \in \mathbb{R}^3$，定义

$$\langle V,W\rangle = V^{T}W, \qquad \|V\| = \sqrt{\langle V,V\rangle}, \qquad (U,V,W) = \det \begin{pmatrix} U^{T} \\ V^{T} \\ W^{T} \end{pmatrix}.$$

向量 $V \times W$ 由 $(V \times W)\cdot X = (V,W,X)$（对一切 X）唯一确定。若 V,W 非零，则夹角 $\theta \in [0,\pi]$ 由

$$\cos\theta = \frac{\langle V,W\rangle}{\|V\|\|W\|}$$

确定。三个线性无关向量的混合积为正、负时，分别构成右手、左手标架。

内积给出的长度不依赖直角坐标系，向量积则还记录定向。所需运算规则归结为下面的恒等式。

命题 1.3.3 (向量运算与运动). 有 Cauchy–Schwarz 不等式 $|\langle V,W\rangle| \le \|V\|\|W\|$，且

$$V\times W = -W\times V, \qquad V\times W \perp V, W,$$
$$\|V\times W\|^2 = \|V\|^2\|W\|^2 - \langle V,W\rangle^2.$$

向量积对每个变量线性；$(U,V,W)=0$ 当且仅当三向量线性相关。若 $A\in O(3)$，则

$$\langle AV, AW\rangle = \langle V,W\rangle, \qquad (AV)\times(AW) = \det(A)A(V\times W).$$

证明. 当 $W\neq 0$ 时，将 V 分解为 $\dfrac{\langle V,W\rangle}{\|W\|^2}W + V_\perp$，对两项平方求和即得不等式。向量积的坐标表达为

$$(v_2w_3 - v_3w_2,\ v_3w_1 - v_1w_3,\ v_1w_2 - v_2w_1),$$

由此得到线性、反对称性、正交性与模长恒等式。混合积的断言是行列式判别法。最后，对任意 X，

$$((AV)\times(AW))\cdot AX = \det(A)(V,W,X) = \big(\det(A)A(V\times W)\big)\cdot AX;$$

由于 A 可逆，最后一个向量恒等式成立。 □

第二章　曲线论

本章主要想回答这样一个问题：我们能否只通过曲率和挠率确定唯一的一条曲线? 为此，我们先从曲线的参数方程出发，观察切向量怎样变化、密切平面怎样转动，由此引入曲率与挠率；然后反过来考虑，已知这两个量时，怎样求出曲线的参数方程。曲线论基本定理将说明，在什么条件下能够求出这样的曲线，以及“唯一”究竟是什么意思。

2.1　参数曲线

同一条轨迹可以由不同的运动产生：质点可以加速、减速，也可以反向经过同一点。为了使用微分，先把曲线看作随参数变化的向量值函数，再区分其中哪些性质只与轨迹的几何形状有关。

定义 2.1.1 (参数曲线与正则性). 设 $I=(a,b)\subseteq\mathbb{R}$，$P:I\to\mathbb{R}^3$ 是 C^k 映射（$k\geq 3$），则称 P 为一条**参数曲线**。若 $P'(t)\neq 0$ 对所有 $t\in I$ 成立，称它为**正则参数曲线**。

注意这里的曲线定义为向量值函数，而不是函数的像集。直观地，可将其视为空间中质点的运动，而不同的运动可能留下相同的轨迹。例如，质点沿着同一轨迹以不同速度运动，这是不同的运动，但轨迹相同。因而在讨论几何形状之前，需要先分清哪些差别来自运动方式。

单是像集相同，也不能保证两个参数化都有相同的正则性。例如 $P(t)=(t,0,0)$ 与 $Q(t)=(t^3,0,0)$ 的像集相同，但 $Q'(0)=0$，它不是正则参数曲线。

曲线的导数记录运动方向与速度；把每一点的向量一起记录，就得到沿曲线的向量场。

定义 2.1.2 (切向量与沿曲线的向量场). $P'(t_0)$ 称为曲线在参数 t_0 处的切向量，$t\mapsto P'(t)$ 称为切向量场。一般地，可微映射 $X:I\to\mathbb{R}^3$ 称为沿 P 的向量场，其向量 $X(t)$ 附着在 $P(t)$ 处。

如果像集有自交，同一个空间点可能对应不同的参数值与切向量。因此在需要时应说明所指的分支。

改变描述运动的时钟，不应改变曲线的几何形状；但新的时钟必须保持足够的光滑性且不能突然停住。

定义 2.1.3 (参数变换与曲线). 若 $\phi:\widetilde{I}\to I$ 是 C^k 微分同胚且 $\widetilde{P}=P\circ\phi$，称 ϕ 为参数变换；$\phi'>0$ 时保持定向，$\phi'<0$ 时反转定向。正则参数曲线在这种变换下的等价类称为一条不带固定参数的曲线。

由于 ϕ 是微分同胚，$\phi(\widetilde{I})=I$，所以

$$\widetilde{P}(\widetilde{I})=P(\phi(\widetilde{I}))=P(I).$$

也就是说，参数变换前后留下的是同一条轨迹，只是描述这条轨迹的参数不同。恒等变换、逆变换与复合分别给出自反性、对称性与传递性，于是可以把由参数变换联系的参数曲线归为一个等价类。这里不能反过来仅凭像集相同就认定两个参数化等价，前面的 t 与 t^3 已经说明了这一点。

我们还关心参数变换是否保持曲线的正则性。链式法则给出

$$\widetilde{P}' = (P' \circ \phi)\phi'.$$

因此，在原曲线正则时，只要 $\phi' \neq 0$，新曲线仍然正则。在区间上，C^k 函数 $t = t(u)$ 满足 $t'(u) \neq 0$ 时严格单调，并在其像上有 C^k 逆，因此给出**容许的参数变换**。

下面几个例子分别展示正则曲线、退化参数和真正的尖点。

例 2.1.4 (直线、圆柱螺线与尖点).

1. $P(t) = tv + v_0$ 在且仅在 $v \neq 0$ 时正则，其像是直线。
2. $P(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ 的速度为 $\sqrt{a^2+b^2}$。当 $a^2+b^2 > 0$ 时正则；$b = 0, a \neq 0$ 时为圆，$a = 0, b \neq 0$ 时为直线。
3. $P(t) = (t^2, t^3, 0)$ 在 $t = 0$ 处不正则，像集满足 $y^2 = x^3$，在原点有尖点。

为了描述整条圆周等不能由一个开区间一一参数化的对象，还要允许局部曲线片的拼接。

定义 2.1.5 (正则曲线片与正则几何曲线). 一个正则参数化若是开区间到其像的同胚，其像称为正则曲线片。一个点集若在每一点附近都是这样的曲线片，且重叠处的参数由容许变换联系，就称为正则几何曲线。

圆周可以由若干开圆弧覆盖。它本身是紧集，不能与一个开区间同胚。除专门讨论闭曲线外，以下局部计算均在一个正则参数曲线片内进行。

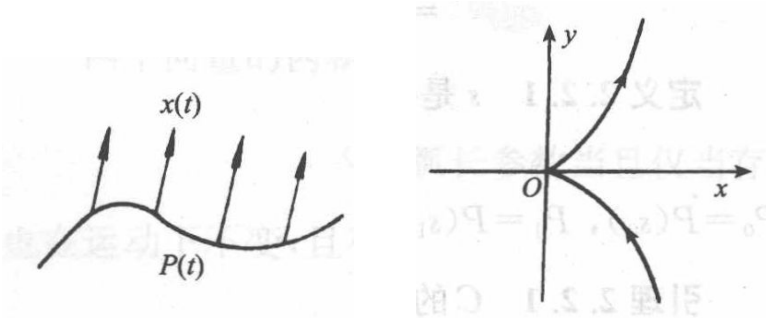


图 2.1: 沿曲线的向量场与半三次尖点。

2.2 弧长参数

参数改变会改变运动速度，因而直接比较 $P'(t)$ 不能只反映曲线的形状。自然的办法是用已经走过的长度作参数，使单位参数增量恰好对应单位长度。

对闭子区间 $[t_0, t_1] \subset I$，曲线弧长为

$$L(P|_{[t_0,t_1]}) = \int_{t_0}^{t_1} \|P'(t)\| \, \mathrm{d}t.$$

换元公式说明这一数值在容许参数变换下不变，包括反转定向的变换；正交矩阵保持速度的模，所以运动也保持弧长。

长度还需要一个起算位置。固定定义域内部的基点 t_0，将从它出发的有向长度记作新参数。这样每次积分都在定义域内的紧区间上进行。

定义 2.2.1 (有向弧长参数). 对正则参数曲线 $P(t)$，令

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|P'(u)\| \, \mathrm{d}u.$$

称 s 为相对于基点和方向的弧长参数。它在 $t < t_0$ 时可以为负；两点间沿该段曲线的长度为 $|s(t_1) - s(t_2)|$。

一般来说，弧长积分未必能显式求出，即使求出了 $s(t)$，也未必方便反解 $t = t(s)$。于是，判断一个给定参数是否已经是弧长参数就尤为重要。沿着上面的构造，弧长参数的作用是消去运动速度的大小，所以应当以单位速度作为判别。

引理 2.2.2 (弧长参数的存在、判别与自由度). 正则曲线总有弧长参数。一个正则参数 s 是弧长参数，当且仅当 $\|P'(s)\| = 1$。两个弧长参数之间必有

$$\widetilde{s} = \varepsilon s + c, \qquad \varepsilon \in \{1, -1\}.$$

证明. 由 $s'(t) = \|P'(t)\| > 0$，s 是到其像区间的容许变换，且

$$\left\| \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}s} \right\| = \frac{\|P'(t)\|}{s'(t)} = 1.$$

反过来，单位速度给出任意参数区间的弧长为参数差的绝对值。若 $s, \widetilde{s}$ 都是弧长参数，链式法则给出 $|\mathrm{d}s/\mathrm{d}\widetilde{s}| = 1$；导数连续且不为零，其符号在区间上不变，积分即得最后的公式。 □

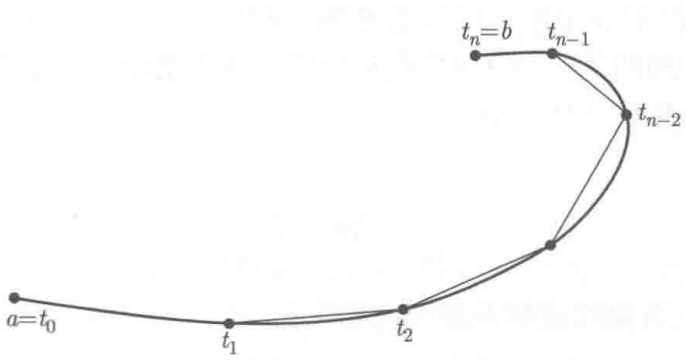


图 2.2: 以折线逼近曲线，分割加细后折线长度趋于曲线弧长。

存在弧长参数并不意味着能写出它的初等表达式。下面两个例子说明为什么后文仍需保留一般参数下的计算公式。

例 2.2.3 (弧长参数不易显式求出). 椭圆 $P(t)=(2\sin t,\cos t,0)$ 满足

$$s(t)=\int_0^t\sqrt{4\cos^2 u+\sin^2 u}\,\mathrm{d}u,$$

这是椭圆积分。对抛物线 $P(t)=(t,t^2,0)$，虽然

$$s(t)=\frac{t}{2}\sqrt{1+4t^2}+\frac{1}{4}\log\bigl(2t+\sqrt{1+4t^2}\bigr),$$

但反解 $t=t(s)$ 仍不方便。

2.3 曲线的局部方程

我们希望刻画曲线在一点附近的形状。以弧长 s 为参数并令 $P_0=P(0)$，Taylor 展开给出

$$P(s)=P_0+sP'(0)+\frac{s^2}{2}P''(0)+\frac{s^3}{6}P'''(0)+o(s^3).$$

使用弧长参数后，P' 的长度恒为 1，所以 P'' 只记录切向的变化，不再混入运动快慢的变化。由 $P'\cdot P'=1$ 得 $P'\cdot P''=0$，当 $P''\neq 0$ 时，这两个导数就确定了两个互相垂直的方向。与其在任意选定的空间坐标轴上比较 Taylor 系数，我们可以沿这两个方向选择坐标，使系数直接反映曲线自身的形状。

另一方面，我们想要找到一个几何量来刻画曲线的弯曲程度。直观上来看，曲线的切向量场转动得越快，曲线弯得就越急。若使用任意参数，这种转动还会受到质点运动快慢的影响；使用弧长参数以后，$T(s)=P'(s)$ 恒为单位向量，$T'(s)$ 就只记录切向量沿单位弧长的转动。因此自然地用 $\|T'(s)\|=\|P''(s)\|$ 定义曲率。

又因为 $T\cdot T=1$，求导得到 $T\cdot T'=0$。当曲率不为零时，可以把 T' 单位化，作为曲线当前弯向的方向，再用叉积补出第三个方向。这样得到的坐标轴来自曲线本身，而不是事先任意选定的空间坐标轴。

定义 2.3.1 (曲率与 Frenet 标架). 对单位速度曲线，称

$$T=P',\qquad \kappa=\|P''\|$$

为单位切向量和曲率。在 $\kappa>0$ 处，定义主法向量 $N=P''/\kappa$、次法向量 $B=T\times N$。右手单位正交标架 $\{P;T,N,B\}$ 称为 Frenet 标架。

标架中的每两个方向又确定一个经过当前点的平面；这些平面分别描述横截方向、弯曲方向及其垂直方向。

定义 2.3.2 (曲线的三个伴随平面). 过 $P(s)$ 的 $\operatorname{span}(N,B)$、$\operatorname{span}(T,B)$、$\operatorname{span}(T,N)$ 分别称为**法平面**、**次切平面**和**密切平面**，其法向量分别为 T,N,B。

因此，对弧长参数，标架的计算式为

$$\begin{aligned} T &= P', \\ N &= \frac{P''}{\|P''\|}, \\ B &= \frac{P' \times P''}{\|P''\|}. \end{aligned}$$

前两项 Taylor 系数落在密切平面内，偏离该平面的第一个可能非零项来自 P''' 的次法向分量。因此引入系数

$$\tau = \frac{P''' \cdot B}{\kappa};$$

下一节将说明它正是密切平面转动的速度所对应的有向量。

将 Taylor 展开分别投影到 T_0, N_0, B_0，得到局部形状的标准表达。

命题 2.3.3 (曲线在一点的标准形). 若 $\kappa(0) > 0$，则

$$P(s) = P_0 + \big(s + o(s^2)\big)T_0 + \left(\frac{\kappa_0}{2}s^2 + o(s^2)\right) N_0 + \left(\frac{\kappa_0\tau_0}{6}s^3 + o(s^3)\right) B_0.$$

相应的多项式曲线

$$P^*(s) = P_0 + sT_0 + \frac{\kappa_0}{2}s^2 N_0 + \frac{\kappa_0\tau_0}{6}s^3 B_0$$

称为此处的密切曲线；s 一般不是 P^* 的弧长参数。

证明. $P'(0) = T_0$，$P''(0) = \kappa_0 N_0$，且 $P'''(0) \cdot B_0 = \kappa_0\tau_0$。对 Taylor 展开取三个分量即得。比较一次项，可以确定 T_0；比较二次项的长度和方向，可以确定 κ_0, N_0，从而得到 $B_0 = T_0 \times N_0$；最后由沿 B_0 方向的三次项求出 τ_0。这说明这些系数由曲线本身确定，并不是任意选取的。 □

若反转弧长方向 $\widetilde{s} = -s$，则 $\widetilde{T} = -T$、$\widetilde{N} = N$、$\widetilde{B} = -B$，而 κ, τ 不变。平移弧长的基点也不改变这些几何量。

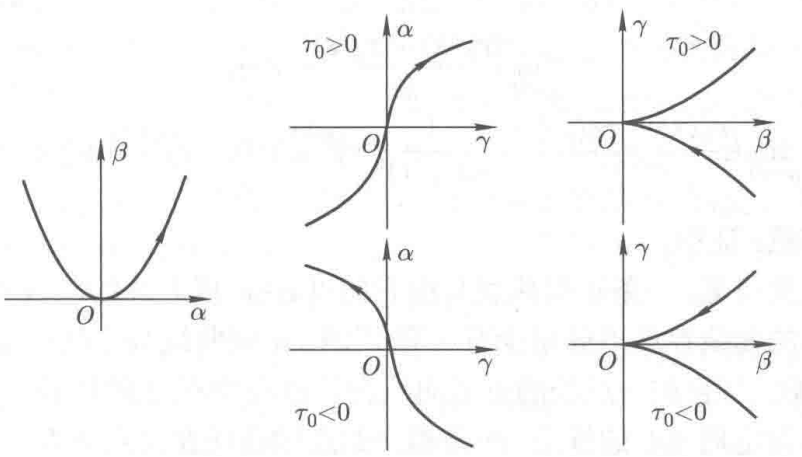


图 2.3: 曲线的局部近似在三个标架坐标平面上的投影；图中 α, β, γ 分别表示 T, N, B 方向。

2.4 曲线的曲率与挠率

上一节从局部展开引入曲率。现在来看它的几何意义：$T(s)$ 是单位向量，因而 $\|T'(s)\|$ 衡量切向量沿单位弧长转动的快慢。

若 $\Delta\theta$ 是 $T(s+\Delta s)$ 与 $T(s)$ 的夹角，则

$$\|T(s+\Delta s)-T(s)\| = 2\sin\frac{\Delta\theta}{2}, \qquad \kappa(s) = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{|\Delta s|}.$$

这说明曲率衡量弯曲程度。不过，曲率还没有区分曲线是在一个固定平面内弯曲，还是一边弯曲一边离开原来的平面。要描述后一种变化，我们回到上一节的密切平面。

密切平面的法向量是次法向量 B。先考虑最简单的情况：若曲线落在某一固定平面内，且所讨论区间上 $\kappa>0$，那么 T, N 都在该平面内，B 就是一个固定单位法向量。若密切平面随曲线转动，B 也随之改变。于是，类似于用 T' 衡量切向量转动的快慢，我们可以用 B' 衡量密切平面转动的快慢。这反映了曲线离开当前密切平面的趋势，也就是这里要刻画的扭曲程度。

还需弄清 B' 的方向。由 $B\cdot B=1$ 得 $B'\perp B$；再对 $B\cdot T=0$ 求导，利用 $T'=\kappa N$，得到

$$B'\cdot T = -B\cdot T' = -\kappa B\cdot N = 0.$$

所以 B' 同时垂直于 B, T，只能沿着 N 的方向。我们只需记录这个分量即可；按下面的符号约定，它的负值称为挠率。

定义 2.4.1 (挠率). 在 $\kappa>0$ 处，定义曲线的**挠率**

$$\tau = -B'\cdot N, \qquad B' = -\tau N.$$

因此 $|\tau| = \|B'\|$，符号记录密切平面转动的定向。

它与前一节的表达一致，因为

$$P'''\cdot B = (\kappa N)'\cdot B = \kappa N'\cdot B = -\kappa N\cdot B' = \kappa\tau.$$

这里均使用 $\kappa>0$；直线等零曲率点并没有由上述公式确定的主法向量和挠率。

下面的算例把这两个量与熟悉的形状联系起来。

例 2.4.2 (直线、圆与圆柱螺线).

1. 单位速度直线 $P(s)=P_0+sv$ 满足 $\kappa=0$。反之，$\kappa\equiv 0$ 时 $T'=0$，故曲线是直线的一段。

2. 半径 $R>0$ 的圆 $P(s)=(R\cos(s/R), R\sin(s/R), 0)$ 有

$$\begin{aligned} T &= (-\sin(s/R), \cos(s/R), 0),\\ N &= (-\cos(s/R), -\sin(s/R), 0),\\ B &= (0,0,1), \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \kappa &= 1/R,\\ \tau &= 0. \end{aligned}$$

3. 令 $\omega=(r^2+h^2)^{-1/2}$，$r>0$，则螺线

$$P(s) = (r\cos\omega s, r\sin\omega s, h\omega s)$$

是单位速度曲线，且

$$T = (-r\omega \sin \omega s, r\omega \cos \omega s, h\omega),$$
$$N = (-\cos \omega s, -\sin \omega s, 0),$$
$$B = (h\omega \sin \omega s, -h\omega \cos \omega s, r\omega),$$

$$\kappa = \frac{r}{r^2 + h^2}, \qquad \tau = \frac{h}{r^2 + h^2}.$$

h 的符号区分螺线的左右旋向。

这三个例子也让两个量的分工更清楚：直线的切向不变，圆的切向转动但密切平面固定，螺线则同时出现这两种变化。后面我们还会反过来问：曲率是正的常数、挠率恒为零的曲线，是否一定是圆周的一段？在一点用与曲线具有相同切向量及曲率向量的圆作近似，可以把曲率的倒数解释成半径。

定义 2.4.3 (曲率半径与密切圆). 当 $\kappa(s) > 0$ 时，称 $\rho = 1/\kappa$ 为曲率半径，$P + \rho N$ 为曲率中心。在密切平面内，以此点为圆心、ρ 为半径的圆称为密切圆。

若曲线落在一个平面内且 $\kappa > 0$，其 B 是该平面的某个固定单位法向量，故 $\tau = 0$。其逆命题将在曲线论基本定理之后一并整理。

最后检查这些量是否真的不依赖图形在空间中的位置。

定理 2.4.4 (运动下的曲率与挠率). 在运动 $\widetilde{P} = AP + b$ 下，弧长与曲率不变；在 $\kappa > 0$ 处有

$$\widetilde{T} = AT,$$
$$\widetilde{N} = AN,$$
$$\widetilde{B} = \det(A)AB,$$
$$\widetilde{\tau} = \det(A)\tau.$$

尤其挠率在固有运动下不变，在非固有运动下变号。

证明. 正交矩阵保持内积与长度，所以前两个标架向量及曲率按所述方式变换。由命题 1.3.3 的向量积公式得到 $\widetilde{B}$，再对弧长求导并与 $\widetilde{N}$ 作内积即得挠率变换。 □

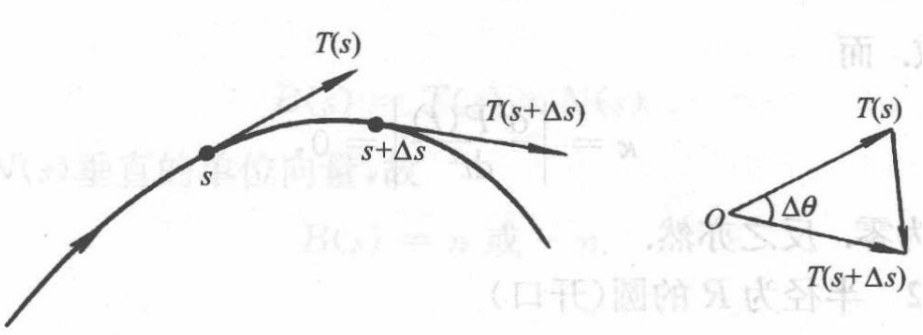


图 2.4: 切向量的转角 $\Delta\theta$ 与曲线弧长增量 Δs。

2.5 Frenet 公式

现在希望描述当参数 s 变化时，整个活动标架 $\{P; T, N, B\}$ 怎样运动，也就是求出 P', T', N', B'。由前面的定义，我们已经知道

$$\begin{aligned} P' &= T, \\ T' &= \kappa N, \\ B' &= -\tau N. \end{aligned}$$

于是只剩下 N' 未知。由于 T, N, B 是一组单位正交基，任何向量都可以在它们上面展开；对 N' 也是如此。关键不在于重新计算复杂的坐标导数，而在于利用标架始终保持单位正交这一事实。

定理 2.5.1 (Frenet 公式)**.** 设 $P(s)$ 为单位速度曲线且 $\kappa > 0$，则

$$P' = T, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{pmatrix} T^T \\ N^T \\ B^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T^T \\ N^T \\ B^T \end{pmatrix}.$$

将各行分别写出，就是

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N, \\ N' &= -\kappa T + \tau B, \\ B' &= -\tau N. \end{aligned}$$

证明. 直接从 $N = P''/\kappa$ 求导会引入较长的表达式。我们已经知道标架保持单位正交，因此只需对这些内积关系求导，就能读出 N' 的三个分量。设 $N' = aT + bN + cB$，得到

$$\begin{aligned} a &= N' \cdot T = -N \cdot T' = -\kappa, \\ b &= N' \cdot N = \frac{1}{2}(N \cdot N)' = 0, \\ c &= N' \cdot B = -N \cdot B' = \tau. \end{aligned}$$

代入即得。矩阵的每一行记录一个标架向量的转置，因而这里的矩阵乘法是通常的实矩阵乘法。 □

实际计算时往往无法显式求出弧长参数。令 $v = \|\dot{P}\| > 0$，用点号表示任意正则参数 t 的导数，即可把上述公式换回 t。

定理 2.5.2 (一般参数下的计算公式). 对正则曲线 $P(t)$，有

$$\kappa = \frac{\|\dot{P} \times \ddot{P}\|}{v^3}, \qquad T = \frac{\dot{P}}{v}.$$

在 $\dot{P} \times \ddot{P} \neq 0$ 处，另有

$$N = \frac{v\ddot{P}}{\|\dot{P} \times \ddot{P}\|} - \frac{\dot{P} \cdot \ddot{P}}{v\|\dot{P} \times \ddot{P}\|}\dot{P},$$
$$B = \frac{\dot{P} \times \ddot{P}}{\|\dot{P} \times \ddot{P}\|}, \qquad \tau = \frac{(\dot{P}, \ddot{P}, \dddot{P})}{\|\dot{P} \times \ddot{P}\|^2}.$$

特别地，对弧长参数，$\tau = (P', P'', P''')/\|P''\|^2$。

证明. 先把加速度分成速度大小的变化与切向的变化。利用 $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t = v$ 及 Frenet 公式，

$$\dot{P} = vT,$$
$$\ddot{P} = \dot{v}T + v^2\kappa N,$$
$$\dot{P} \times \ddot{P} = v^3\kappa B.$$

叉积消去了 $\dot{v}T$，因此可以从任意速度的运动中提取曲率，T, N, B 的公式也随之得到。计算挠率时，混合积还会消去第三阶导数的切向与主法向分量；只需求出它的 B 分量 $v^3\kappa\tau$，于是

$$(\dot{P}, \ddot{P}, \dddot{P}) = v^6\kappa^2\tau,$$

而分母为 $v^6\kappa^2$，从而得到挠率公式。 □

主法向量的表达式还可以这样理解：先从加速度中减去沿速度方向的投影，再单位化，得到

$$N = \frac{\|\dot{P}\|}{\|\dot{P} \times \ddot{P}\|}\ddot{P} - \frac{\dot{P} \cdot \ddot{P}}{\|\dot{P}\|\|\dot{P} \times \ddot{P}\|}\dot{P}.$$

弧长参数下 $\|P'\| = 1$、$P' \perp P''$，这些式子就回到先前的定义。涉及主法向与挠率的分母仍要求曲率非零。

这也给出了导数与几何平面的直接对应：$\kappa > 0$ 当且仅当 $\dot{P}, \ddot{P}$ 线性无关，此时

$$\operatorname{span}(\dot{P}) = \operatorname{span}(T), \qquad \operatorname{span}(\dot{P}, \ddot{P}) = \operatorname{span}(T, N).$$

如果还满足 $\tau \neq 0$，则前三阶导数张成整个空间。

Frenet 公式既能计算，也能把几何约束化成微分方程。下面给出三个应用。

例 2.5.3 (Bouquet 公式与高阶展开). 由 $P''=\kappa N$ 得

$$P'''=-\kappa^2 T+\kappa' N+\kappa\tau B.$$

因此，以 $P(0)$ 为原点、T_0,N_0,B_0 为坐标轴，曲线满足

$$\begin{aligned} x(s)&=s-\frac{\kappa_0^2}{6}s^3+o(s^3),\\ y(s)&=\frac{\kappa_0}{2}s^2+\frac{\kappa_0'}{6}s^3+o(s^3),\\ z(s)&=\frac{\kappa_0\tau_0}{6}s^3+o(s^3). \end{aligned}$$

这就是 Bouquet 公式。若需更高阶展开，记 Frenet 矩阵为 A，令 $A_0=I$，递推 $A_{m+1}=A_m'+A_mA$，则标架矩阵 X 满足 $X^{(m)}=A_mX$；$P^{(m+1)}$ 由第一行读出。每次递推须有足够阶的光滑性。

要判断曲线是否在某个球面上，可以尝试把球心写在 Frenet 标架内，并要求它不随 s 改变。

例 2.5.4 (球面曲线的判别). 设 $\kappa>0$、$\tau\neq 0$，令 $\rho=1/\kappa$，并假设以下导数存在且连续。曲线落在一个球面上的充要条件是

$$\rho\tau+\left(\frac{\rho'}{\tau}\right)'=0.$$

事实上，若球心为 C，对 $\|P-C\|^2=R^2$ 连续求导，依次得到

$$\begin{aligned} (P-C)\cdot T&=0,\\ (P-C)\cdot N&=-\rho,\\ (P-C)\cdot B&=-\frac{\rho'}{\tau}. \end{aligned}$$

因此 $C=P+\rho N+(\rho'/\tau)B$。由 Frenet 公式，

$$C'=\left[\rho\tau+(\rho'/\tau)'\right]B.$$

这证明必要性；反过来，条件使 C 为常向量，且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\rho^2+(\rho'/\tau)^2\right)=0,$$

故 $\|P-C\|$ 为正的常数，也就得到充分性。

拉直一条沿曲线缠绕的细线，其端点的轨迹给出另一类与标架关系紧密的曲线。

定义 2.5.5 (渐伸线与渐缩线). 若曲线 C_1 在对应点的切线是 C_2 的一条法线，称 C_2 为 C_1 的**渐伸线**，C_1 为 C_2 的**渐缩线**。

这个定义转化成切向量与连接线段的正交关系，就能求出参数表示。

例 2.5.6 (渐伸线与渐缩线的方程). 设 $P_1(s)$ 单位速度。将渐伸线写成 $P_2 = P_1 + \lambda T_1$，条件 $P_2' \cdot T_1 = 0$ 给出 $1 + \lambda' = 0$，故

$$P_2(s) = P_1(s) + (c - s)T_1(s).$$

它在 $(c-s)\kappa_1(s) \neq 0$ 时正则。
反过来，给定单位速度曲线 $P_2(s)$ 且 $\kappa_2 > 0$，渐缩线可写为

$$P_1 = P_2 + \rho_2 N_2 + \mu B_2, \qquad \rho_2 = 1/\kappa_2.$$

要求 P_1' 平行于 $\rho_2 N_2 + \mu B_2$，得到

$$\rho_2 \mu' - \mu \rho_2' + \tau_2(\rho_2^2 + \mu^2) = 0.$$

因此 $\big(\arctan(\mu/\rho_2)\big)' = -\tau_2$，在所选分支上

$$P_1 = P_2 + \rho_2 N_2 + \rho_2 \tan\left(c - \int \tau_2 \, \mathrm{d}s\right) B_2.$$

仅取表达式有限且 $P_1' \neq 0$ 的区间；退化为一点时不能称为正则渐缩线。

上述构造并不局限于三维。对高维曲线，将各阶导数依次正交化，仍能得到只与相邻标架向量相联系的运动公式。

命题 2.5.7 (高维 Frenet 标架). 设 $P : I \to \mathbb{R}^n$ 足够光滑，且 $P', \dots, P^{(n-1)}$ 线性无关。对这些向量依次作 Gram–Schmidt 正交化，再按正定向选定 e_n，得到唯一的右手正交标架，使

$$\operatorname{span}(e_1, \dots, e_j) = \operatorname{span}(P', \dots, P^{(j)}), \quad j < n,$$

且各阶过渡矩阵的行列式为正。对任意参数，$e_i' = \sum_j \omega_{ij} e_j$，其中 $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ 且 $|i - j| > 1$ 时 $\omega_{ij} = 0$。

证明. 独立性保证每一步正交化的剩余向量非零，正的归一化系数给出所需定向与唯一性。对 $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$ 求导得到反对称性；又 e_i' 落在 $\operatorname{span}(P', \dots, P^{(i+1)})$ 中，所以 $j > i+1$ 时系数为零，其余由反对称性得到。 □

若参数为弧长，记 $\kappa_i = \omega_{i,i+1}$，便有

$$\begin{aligned} e_1' &= \kappa_1 e_2, \\ e_i' &= -\kappa_{i-1} e_{i-1} + \kappa_i e_{i+1}, \\ e_n' &= -\kappa_{n-1} e_{n-1}. \end{aligned}$$

其中 $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-2} > 0$，最后一个曲率可以有符号；三维时即 $\kappa_1 = \kappa, \kappa_2 = \tau$。

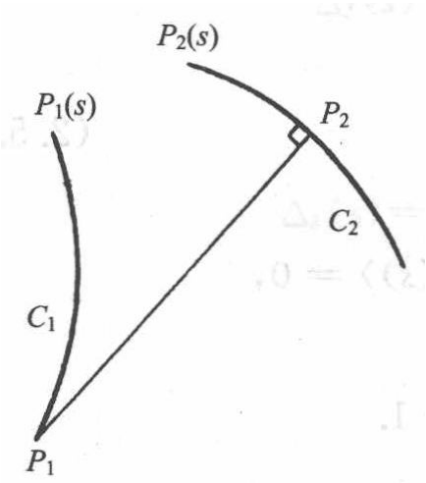


图 2.5: 渐伸线与渐缩线：连接对应点的直线在 P_1 处切于 C_1，在 P_2 处垂直于 C_2。

2.6 曲线论基本定理

前面，我们从曲线的参数方程 $P(s)$ 算出了曲率 $\kappa(s)$ 和挠率 $\tau(s)$。现在反过来问：我们能否只通过曲率和挠率确定唯一的一条曲线？这里给定的是它们在各个弧长 s 处的值，而不只是某一点处的两个数。

先注意到，平移或旋转一条曲线不会改变它的曲率和挠率。因此，仅凭这两个函数，不能确定曲线在空间中的位置和朝向。我们再指定曲线的起点 $P(a) = P_0$，以及该处的单位切向量、主法向量和次法向量 T_0, N_0, B_0，然后问：是否存在唯一的一条曲线，同时满足这些初始条件，并且具有给定的曲率和挠率？

直接把曲率、挠率的计算公式当作关于 P 的方程，会同时遇到高阶导数和非线性项。下面的证明基于这样的观察：Frenet 公式联系了曲线的曲率、挠率与 Frenet 标架。已知 $\kappa(s), \tau(s)$ 后，把 $T(s), N(s), B(s)$ 看作未知的向量函数，Frenet 公式就是关于它们的一组一阶线性微分方程。先解出这三个向量函数，再由 $P' = T$ 和给定的起点积分，就能求出曲线的参数方程 $P(s)$。

不过，方程的解最初只是三个向量函数；还需要确认它们始终组成右手单位正交标架，并且真是所得曲线的 Frenet 标架。下面的证明将依次完成这两步。

定理 2.6.1 (曲线论基本定理)**.** 设 $\kappa > 0, \tau$ 为闭区间 $[a, b]$ 上的 C^1 函数，给定一点 P_0 和右手单位正交标架 T_0, N_0, B_0。则存在唯一的 C^3 单位速度曲线 $P(s)$，以 $\kappa(s), \tau(s)$ 为曲率与挠率，并满足

$$\{P(a); T(a), N(a), B(a)\} = \{P_0; T_0, N_0, B_0\}.$$

证明. 令

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}, \qquad X(a) = \begin{pmatrix} T_0^T \\ N_0^T \\ B_0^T \end{pmatrix},$$

求解线性常微分方程 $X' = AX$。连续系数保证解在整个闭区间上存在且唯一。现在检查正交性：初始矩阵满足 $X(a)^T X(a) = I$，而系数的反对称性 $A^T = -A$ 给出

$$(X^T X)' = X^T (A^T + A) X = 0,$$

所以 $X^T X = I$；又 $\det X$ 连续且只能取 ± 1，初值为 1，故始终为 1。这样，X 的各行分别给出右手单位正交向量 T, N, B。

标架已构造好，只需令 $P(s) = P_0 + \int_a^s T(u)\mathrm{d}u$。于是 $P' = T$，$\|P'\| = 1$，$P'' = \kappa N$；由于 $\kappa > 0$，这里的 N 正是曲线的主法向量，$B = T \times N$。由 $B' = -\tau N$，其挠率也是给定的 τ。由系数的 C^1 正则性，X 为 C^2，故 P 为 C^3。

唯一性可以沿同一路线反推：任何满足同样初值的曲线，其 Frenet 标架都解同一个线性初值问题，因而标架相同；再由 $P' = T$ 及初始位置相同，曲线也相同。 □

如果不指定初始位置和标架，就不能要求两条曲线的参数方程完全相同；我们所能证明的是，它们经过平移和旋转后重合。

定理 2.6.2 (固有运动意义下的唯一性)**.** 两条具有相同弧长参数区间、处处正曲率的曲线，若对应弧长处的曲率与挠率相同，则存在一个固有运动使它们重合。

证明. 固定同一个弧长值 a。先平移第一条曲线，使两条曲线的 $P(a)$ 重合；再绕这个点旋转，使第一条曲线在此处的 T, N, B 分别与第二条曲线的 T, N, B 相同。由于两组向量都是右手单位正交标架，这样的旋转存在且唯一。平移和旋转保持曲率与挠率，现在两条曲线又有相同的初始位置和标架，由定理 2.6.1 的唯一性，它们在整个参数区间上重合。 □

因此 $\kappa = \kappa(s), \tau = \tau(s)$ 可看作曲线的内在方程。[1] 高维情形用命题 2.5.7 的反对称矩阵重复同一论证：给定前 $n-2$ 个正曲率与最后一个有向曲率，即在固有运动意义下确定相应的非退化曲线。

基本定理之外，几个特别简单的曲率条件也能直接解释。

命题 2.6.3 (直线、平面曲线与圆的判别)**.** 对连通参数区间上的单位速度曲线：

1. $\kappa \equiv 0$ 当且仅当曲线为直线的一段；
2. 在 $\kappa > 0$ 的条件下，$\tau \equiv 0$ 当且仅当曲线落在某个平面内；
3. $\kappa \equiv c > 0, \tau \equiv 0$ 当且仅当曲线为半径 $1/c$ 的圆周的一段。

证明. 第一项由 $T' = 0$ 得到。第二项中，$\tau = 0$ 给出 $B' = 0$，令 $B = b$，则 $(P \cdot b)' = T \cdot b = 0$，所以 P 落在法向量为 b 的平面内；逆向已在上一节证明。第三项中

$$(P + c^{-1} N)' = T + c^{-1}(-cT) = 0,$$

故曲率中心固定，且到中心的距离恒为 $1/c$；结合第二项便得到圆。逆向由圆的计算结果成立。 □

[1] 这里沿用主教材的术语，意思是该描述不依赖空间直角坐标系。它不表示曲率和挠率是抽象一维 Riemann 流形的内蕴不变量；二者仍反映曲线在空间中的嵌入。

$\kappa > 0$ 的假设同时保证挠率有定义。若允许曲率在若干点为零，就不能不加说明地把“各段挠率为零”推广为“整条曲线落在同一个平面”。

2.7 平面曲线的整体性质

平面曲线是空间曲线的特例。在曲率不为零的区间上，它的挠率为零，因而前面的 Frenet 公式已经能够描述它。但平面曲线还有自身的特点，值得单独讨论：空间曲线在零曲率点可能失去 Frenet 标架，而在定向平面内，我们始终可以将单位切向量旋转 90° 得到一个单位法向量。因此平面曲线可以使用允许变号的曲率，且不需要排除拐点。

定义 2.7.1 (平面标架与相对曲率). 对单位速度曲线 $P(s) = (x(s), y(s))$，令

$$\alpha = (x', y'), \qquad \beta = (-y', x').$$

定义相对曲率 $\kappa_r = \alpha' \cdot \beta$，则

$$\begin{aligned} P' &= \alpha, \\ \alpha' &= \kappa_r \beta, \qquad \kappa = |\kappa_r|. \\ \beta' &= -\kappa_r \alpha, \end{aligned}$$

后两式由 α, β 的单位正交关系及 β 是 α 的正向 90° 旋转得到。一般参数下，

$$\kappa_r = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}.$$

为了把转动速度积分成转动角度，需连续地记录切线方向，而不能每次都把角度截回 $[0, 2\pi)$。

定义 2.7.2 (方向角). 满足 $\alpha(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s))$ 的连续实值函数 θ 称为方向角的一个连续选取。它在区间上存在，固定初值后唯一，且

$$\theta' = \kappa_r.$$

存在性可将区间分成足够短的小段，使每段切向量落在一个开半圆内，再逐段选择与前段端点一致的角度；两个连续选取之差是连续的 $2\pi\mathbb{Z}$ 值函数，所以为常数。对三角表达式求导即得 $\theta' = \kappa_r$。

因此，给定相对曲率 $\kappa_r(s)$ 后，先积分求出方向角 $\theta(s)$，便知道单位切向量是 $(\cos\theta(s), \sin\theta(s))$；再对它的两个分量积分，就能求出曲线的坐标 $x(s), y(s)$。这两步分别需要给定初始方向角和初始位置。

定理 2.7.3 (平面曲线基本定理). 给定连续函数 $\kappa_r(s)$、初始位置 (x_0, y_0) 和方向角 θ_0，唯一的单位速度曲线由

$$\theta(s) = \theta_0 + \int_{s_0}^{s} \kappa_r(t)\mathrm{d}t,$$
$$x(s) = x_0 + \int_{s_0}^{s} \cos\theta(t)\mathrm{d}t, \qquad y(s) = y_0 + \int_{s_0}^{s} \sin\theta(t)\mathrm{d}t$$

给出。

证明. 求导检查单位速度与相对曲率；反过来，任一满足初值的曲线都必须满足上述积分式，故唯一。 □

现在考虑整体问题。光滑闭曲线要求端点的位置和各阶导数相匹配，因而可将参数按总长 L 周期延拓。若 $P : [0, L) \to \mathbb{R}^2$ 单射，则称其为简单闭曲线。

绕闭曲线一周，切向量回到原方向，但连续记录的方向角可能已经转过若干整圈。这一整数就是旋转指标。

定义 2.7.4 (旋转指标). 对正则闭曲线，定义

$$i(C) = \frac{\theta(L) - \theta(0)}{2\pi} \in \mathbb{Z}.$$

当曲线为 C^2 时，$i(C) = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^L \kappa_r \mathrm{d}s$。反向遍历时 $i(C)$ 变号。

我们首先可能想到把曲线连续变形成一个圆，再利用圆的旋转指标已经知道这一点。这个想法中真正有用的是：旋转指标取整数值，若在变形中连续变化，它就只能保持不变。不过，角度来自非零切向量，所以变形的每一个中间曲线都必须正则。具体地，这个整数在保持正则性的连续变形中不变：相邻参数下的单位切向量一致接近，可在相同的小圆弧上连续选择角度，使总角度变化连续；连续的整数值只能局部恒定，再由变形参数区间连通而恒定。因此，用变形研究旋转指标时，整个过程中都要保留非零切向量。[2]

直接跟踪切向量，尚不容易利用“简单闭合”这个条件。我们改看曲线上两点之间的割线：简单性保证两点不重合时割线方向有定义，两点靠近时它又趋于切线方向。要把这些方向统一记录成实数角度，先需要下面的引理。

引理 2.7.5 (三角形上的连续角度). 若 $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ 是闭三角形，$f : \Delta \to S^1$ 连续，则存在连续实函数 φ 使 $f = (\cos\varphi, \sin\varphi)$。

证明. 把 S^1 视为复平面中的单位圆。固定 $q \in \Delta$，令 $H(x,t) = f(q + t(x-q))$。由紧集上的一致连续性，可取分割 $0 = t_0 < \cdots < t_m = 1$，使对每个 x，$H(x, t_{j+1})/H(x, t_j)$ 都落在以 1 为中心、不含 -1 的开圆弧内。每个比值都有连续的主幅角。将这些幅角相加，再加 $f(q)$ 的一个幅角，即得到 $f(x)$ 的连续幅角。 □

[2]直线插值未必保留这一条件。例如 $P(s) = (\cos s, \sin s)$ 与 $Q(s) = -P(s)$ 的直线同伦在中间时刻缩成一点，旋转指标在那里没有定义。

这一引理应用于两点间割线的方向，将总转角转化成三角形边界上容易计算的角度变化。

定理 2.7.6 (旋转指标定理)**.** 平面上的 C^1 正则简单闭曲线满足 $i(C) = \pm 1$。

证明. 用弧长参数 $s \in [0, L]$，在三角形 $\Delta = \{(u, v) : 0 \le u \le v \le L\}$ 内定义

$$f(u, v) = \frac{P(v) - P(u)}{\|P(v) - P(u)\|} \quad (0 < v - u < L).$$

简单性保证分母非零。在对角线上连续延拓为 $f(s, s) = T(s)$，在顶点 $(0, L)$ 延拓为 $-T(0)$；后者由

$$P(v) - P(u) = -\big(u + L - v\big)T(0) + o(u + L - v)$$

得到。由引理 2.7.5，f 在整个三角形上有连续幅角。

取 $P(0)$ 为曲线的一个最低点，平移至原点；其切线水平。若 $T(0)$ 指向右方，则沿边 $(0, s)$ 的割线 $P(s) - P(0)$ 始终在闭上半平面，幅角由 0 变为 π；沿边 (s, L) 的割线 $P(L) - P(s)$ 在闭下半平面，连续幅角由 π 变为 2π。由于这两条边与对角线有相同的起止顶点，沿对角线的角度变化也是 2π，即 $i(C) = 1$。若 $T(0)$ 指向左方，同理得到 -2π。 □

下面用相对曲率判断凸性。必须保留定向的选择：反向遍历同一条凸曲线会使相对曲率全部变号。

定义 2.7.7 (凸曲线)**.** 若平面曲线整体位于每一点的切线所确定的某一个闭半平面内，称其为凸曲线。

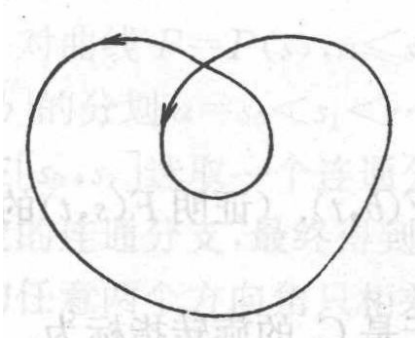


图 2.6: 带自交的闭曲线：简单闭合条件在凸性判别中不能省略。

切向量若沿同一方向连续转动，就不会使曲线越过自身的支撑切线，这给出下面的判别。

定理 2.7.8 (凸闭曲线的曲率判别)**.** 一条 C^2 正则简单闭曲线是凸曲线，当且仅当 $\kappa_r \ge 0$ 处处成立或 $\kappa_r \le 0$ 处处成立。取正向遍历时，对应条件为 $\kappa_r \ge 0$。

证明. 先设 $\kappa_r \ge 0$。方向角单调且由旋转指标定理一周增加 2π。任取一点为起点，使其切线为 x 轴、$\theta(0) = 0$。因为 $y' = \sin\theta$，当 θ 从 0 增至 π 时 y 非减，从 π 增至 2π 时 y 非增；又起止高度均为零，故整条曲线都在 $y \ge 0$ 的半平面内。起点任意，所以曲线凸。

反过来，对正向遍历的简单闭凸曲线，内部位于每一点有向切线的左侧。以当前点为原点、切向为 x 轴正向，附近曲线可以写为 $y = f(x)$，满足 $f(0) = f'(0) = 0$ 且 $f(x) \geq 0$，所以 $f''(0) \geq 0$。此时 $\kappa_r = f''(0)$，得到结论。反向情形令参数反向即可。 □

这里的简单闭合条件不能去掉（见图 2.6）。非简单的闭曲线即使切向量始终向同一方向转动，也可能绕行多圈而不满足上述整体支撑性质。

第三章　曲面的局部性质

3.1　曲面与参数曲面片

曲线论中，我们先由参数方程找到切向与标架，再用曲率、挠率描述形状。曲面也从参数方程开始，不过经过一点的切方向现在组成一个平面，弯曲程度还可能随方向改变。我们先弄清这个切平面如何产生。

类似于用参数方程描述曲线，我们可以用两个参数描述曲面。直观地，将平面区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 经过伸缩、扭曲等变形放到 $\mathbb{R}^3$ 中，就得到一个参数曲面。不过，“使用两个参数”还不意味着得到的是二维曲面：例如两个参数可能都只沿同一条直线改变位置。因此仍需正则性来排除这种退化。

定义 3.1.1 (参数曲面与正则性). 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 为开集，$P : D \to \mathbb{R}^3$ 为 C^k 映射，$k \geq 3$。称 $P(u,v)$ 为参数曲面。若处处有

$$\operatorname{rank}(P_u, P_v) = 2, \quad \text{即} P_u \times P_v \neq 0,$$

则称它正则。u 或 v 为常数所得曲线称为参数曲线。

先固定 $v = v_0$，只让 u 变化，就得到曲线 $u \mapsto P(u, v_0)$；固定 $u = u_0$ 同理。因而，参数域中的横线和竖线经过 P 后，形成曲面上的两族参数曲线。它们未必还是直线，也未必相互垂直，但仍然把曲面组织成一张参数网。

在参数平面上，我们靠横纵坐标 (u,v) 确定一个点；现在也希望借这张网，用同样的两个数确定曲面上的一个点。这里有一个需要注意的问题：若不同的参数点映到同一个空间点，这两个数就不能作为该曲面片上的唯一坐标。因此，要把参数真正当成曲面坐标使用，还需要在所讨论范围内有一一对应，并且正反两个方向都连续。

正则条件表示两个参数确实给出两个独立方向。它保证局部不折叠，却不保证整个参数域上的单射性。例如 $P(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$ 处处正则，却随 u 周期重复。

定义 3.1.2 (容许的参数变换). 设 $\phi : \widetilde{D} \to D$ 为 C^k 微分同胚，$\widetilde{P} = P \circ \phi$，则称 ϕ 为容许的参数变换。写作 $u = u(\tilde{u}, \tilde{v}), v = v(\tilde{u}, \tilde{v})$，其 Jacobi 行列式处处非零。

链式法则给出

$$\widetilde{P}_{\tilde{u}} \times \widetilde{P}_{\tilde{v}} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}(P_u \times P_v),$$

所以正则性在参数变换下保持。正则性为什么能够保证在足够小的范围内建立坐标？写 $P = (x,y,z)$，注意

$$P_u \times P_v = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right).$$

叉积不为零，意味着至少有一个二阶子式不为零。不妨设当前点处 $\partial(x,y)/\partial(u,v) \neq 0$。逆函数定理告诉我们，在缩小后的邻域中，可以由 x, y 唯一且光滑地解出 $u = u(x,y), v =$

$v(x,y)$。再代入第三个坐标，得到

$$z = f(x,y) := z(u(x,y), v(x,y)).$$

于是这部分曲面就是一个图像，而图像上的点显然可以由 (x,y) 唯一记录。再通过 (x,y) 与 (u,v) 的局部对应，就得到参数域与这一片曲面的同胚。这里用的是局部逆函数定理，所以结论也是局部的，不能因此断言整个参数化单射。

一张这样的坐标网仍未必覆盖整个曲面。球面的经纬度在两极失效，就需要换一张网；圆柱的角度绕一周会重复，也需要限制坐标范围。因此，我们先定义一张网所描述的曲面片，再允许用若干片描述整个曲面。

定义 3.1.3 (曲面片与正则曲面). 沿用主教材的约定，若 D 为单连通开集，P 正则且为 D 到其像集 $P(D)$ 的同胚，则称其为正则参数曲面片。连通子集 $S \subset \mathbb{R}^3$ 称为正则曲面，是指每点都有一个空间邻域 V，使 $S \cap V$ 是这样的曲面片。

两个要求分别处理不同的问题：秩为 2 保证两个切方向独立，到 $P(D)$ 的同胚则保证这一片上的点可由参数唯一且连续地记录。一般曲面允许由多个这样的片拼成；重叠处的过渡映射由上述局部图像表示可知是光滑的。

例 3.1.4 (图像、圆柱与球面). 图像 $P(u,v) = (u, v, f(u,v))$ 总是正则的,因为 $P_u \times P_v = (-f_u, -f_v, 1)$。圆柱的上述参数化限制在长度小于 2π 的角度区间上便给出曲面片，适当取两个区间可覆盖圆柱。
球面可用

$$P(u,v) = a(\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u), \quad 0 < u < \pi$$

描述除去两极及一条经线的部分。两极处这套参数退化，球面本身却是正则的：在北极附近改用图像 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 即可。球面是紧的，不能与平面开集同胚；圆柱不单连通，也不能由上述约定下的一个曲面片覆盖。

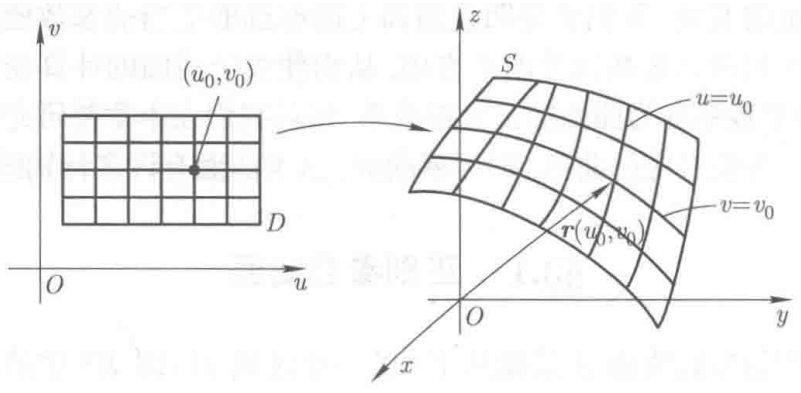


图 3.1: 参数域中的坐标网映成曲面上的参数曲线网。

3.2 切平面与法方向

要描述曲面在一点附近的形状，首先应找到它的一阶近似。曲面上经过该点的曲线，其速度向量正好给出这个近似平面的所有方向。

定义 3.2.1 (切空间、切平面与法线). 设 $p = P(u_0, v_0)$。曲面上经过 p 的 C^1 曲线在该点的速度向量称为切向量。全体切向量组成切空间 T_pS；过 p 且平行于该空间的仿射平面 $p + T_pS$ 称为切平面，其正交方向称为法方向。

要实际计算这些向量，只需把曲面的参数曲线与一般曲线联系起来；链式法则将给出一组自然的基。

命题 3.2.2 (切空间的坐标描述). $T_pS = \mathrm{span}\{P_u, P_v\}$，因而它是二维向量空间。切平面和一条选定的单位法线分别为

$$X = p + aP_u + bP_v, \qquad X = p + tn, \qquad n = \frac{P_u \times P_v}{\|P_u \times P_v\|}.$$

证明. 设曲线在 $t = 0$ 经过 p，将它写成 $c(t) = P(u(t), v(t))$。链式法则给出

$$c'(0) = u'(0)P_u(u_0, v_0) + v'(0)P_v(u_0, v_0).$$

因此，不论在曲面上选怎样的曲线，它在 p 处的速度都落在 P_u, P_v 张成的平面内。这先说明 $T_pS \subseteq \mathrm{span}\{P_u, P_v\}$。

但我们还没有说明这个平面中的每个向量都能作为某条曲线的速度。任给两个数 a, b，在参数域中取直线 $(u_0 + at, v_0 + bt)$，再把它映到曲面上，得到

$$c(t) = P(u_0 + at, v_0 + bt).$$

只要 t 足够小，这条曲线就有定义，且 $c'(0) = aP_u + bP_v$。于是反向包含也成立。正则性保证 P_u, P_v 线性无关，所以全体切向量确实构成一个二维向量空间，而叉积给出其法方向。 □

注意切空间经过向量空间的原点，切平面经过曲面上的点 p；二者可借平移对应，但不是同一个集合。参数变换只是把 P_u, P_v 换成另一组基，所以切空间与参数无关。

选择 n 相当于区分曲面的两侧。由上一节的叉积变换式，Jacobi 行列式为正时由参数诱导的单位法向量不变，为负时变号。

定义 3.2.3 (定向与可定向性). 曲面片上单位法向量的一个连续选择称为定向。若曲面可被一族参数图覆盖，且重叠处的参数变换均保持定向，则称曲面可定向。

这一逐图的定义还可以用一个全局几何对象来判别，从而避免逐个检查所有过渡映射。

命题 3.2.4 (可定向性的法向量判别). 正则曲面可定向，当且仅当它有一个处处定义的连续单位法向量场。

证明. 若过渡映射保持定向，各图诱导的单位法向量在重叠处相同，故可拼合。反之，给定连续 n，缩小连通参数域后，图诱导的法向量与 n 或处处相同，或处处相反；后一种情形交换两个参数。这样各图都诱导 n，重叠处的 Jacobi 行列式必为正。 □

3.2.1 微分、余切空间与一阶近似

有了切空间以后，还会遇到 $\mathrm{d}u, \mathrm{d}v$ 这样的记号。它们在后面的基本形式中反复出现，因而需要先说明：它们是什么对象，又怎样作用在切向量上。

把参数 u, v 看成曲面片上的坐标函数。沿曲线 $c(t)$ 运动时，$u(c(t)), v(c(t))$ 记录两个坐标的变化。若 $c(0) = p, c'(0) = X$，我们用

$$\mathrm{d}u_p(X) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} u(c(t)), \qquad \mathrm{d}v_p(X) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} v(c(t))$$

记录坐标沿 X 的变化率。由上面关于切向量的计算，若 $X = aP_u + bP_v$，这两个数恰好是 a, b，并不依赖所选曲线的其他部分。

于是 $\mathrm{d}u, \mathrm{d}v$ 都是从 T_pS 到 $\mathbb{R}$ 的线性映射，也就是对偶空间 T_pS^* 中的元素；这个对偶空间称为余切空间。它们满足

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u(P_u) &= 1, \qquad \mathrm{d}u(P_v) = 0, \\ \mathrm{d}v(P_u) &= 0, \qquad \mathrm{d}v(P_v) = 1. \end{aligned}$$

所以 $\mathrm{d}u, \mathrm{d}v$ 正是与 P_u, P_v 对偶的一组基。例如 $X = 2P_u - P_v$ 时，$\mathrm{d}u(X) = 2, \mathrm{d}v(X) = -1$：它们的作用就是读出切向量在这组基下的分量。这里 $\mathrm{d}u$ 是一个线性函数，$\mathrm{d}u(X)$ 才是一个数，二者应当区分。

再看曲面参数化的全微分。在参数点 $q = (u, v)$ 处，给定参数增量 $h = (h^1, h^2)$，有

$$\mathrm{d}P_q(h) = h^1 P_u + h^2 P_v, \qquad P(q + h) - P(q) = \mathrm{d}P_q(h) + o(\|h\|).$$

这就是说，先沿参数域移动 h，再映到曲面上，实际位移的一阶近似就是切向量 $\mathrm{d}P_q(h)$。因此微分既联系了参数域与切平面，也解释了为什么切平面是一阶近似。

如果把位置看作曲面到空间的包含映射 $\iota : S \to \mathbb{R}^3$，则其微分满足 $\mathrm{d}\iota_p(X) = X$。沿用位置向量的传统记法，也把这个微分记为 $\mathrm{d}P$，便有

$$\mathrm{d}P = P_u \mathrm{d}u + P_v \mathrm{d}v, \qquad \mathrm{d}P(X) = X. \tag{3.2.1}$$

等式右端的意思是：先用 $\mathrm{d}u, \mathrm{d}v$ 读出 X 的两个分量，再用 P_u, P_v 拼回原来的向量。因为每个输入切向量得到的是一个空间向量，这也称为向量值一次形式。后文写 $\mathrm{d}P \cdot \mathrm{d}P$ 时，实际上仍是先让这些线性映射作用于切向量，再作内积；不要把线性映射本身与它的某个取值混为一谈。

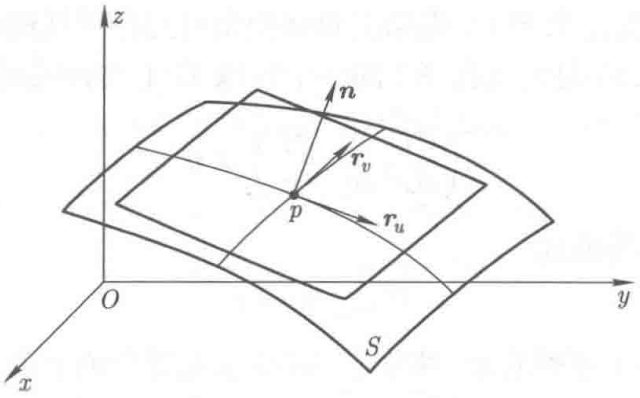


图 3.2: 曲面的切平面与法方向；图中 r_u, r_v 对应正文的 P_u, P_v。

3.3 第一基本形式

这一节的动机是考虑这样一个问题：我们先前定义的切空间 $T_pS \subset \mathbb{R}^3$ 是一个向量空间，而对一个向量空间来说，其内部的向量如何做内积是重要的，所以我们考虑切空间中向量的内积。由于任何一个切向量 $X \in T_pS$ 同时也是 $\mathbb{R}^3$ 中的向量，所以自然地，我们定义 T_pS 中的内积就是 $\mathbb{R}^3$ 中的 Euclid 内积在 T_pS 上的限制。

不过，这样定义以后，第一基本形式与原来的空间内积有什么关系，为什么还需要另起一个名字？先看实际计算。若把切向量写成

$$X = aP_u + bP_v,$$

那么它的长度平方为

$$\begin{aligned}\langle X, X\rangle &= (aP_u + bP_v)\cdot(aP_u + bP_v)\\ &= a^2(P_u\cdot P_u) + 2ab(P_u\cdot P_v) + b^2(P_v\cdot P_v).\end{aligned}$$

在某一点固定下来以后，这个式子中与曲面有关的只有三个数 $P_u\cdot P_u, P_u\cdot P_v, P_v\cdot P_v$。只要记下它们，我们就能根据两个坐标分量 a, b 计算任意切向量的长度，而不必每次重新写出它在 $\mathbb{R}^3$ 中的三个分量。这就是把内积写成基本形式的用处。

定义 3.3.1 (第一基本形式). 曲面上由环境内积诱导的内积 $\mathrm{I}_p(X,Y) = \langle X, Y\rangle$ 称为第一基本形式。记

$$E = P_u\cdot P_u,\quad F = P_u\cdot P_v,\quad G = P_v\cdot P_v,\qquad g = \begin{pmatrix} E & F\\ F & G\end{pmatrix},$$

则 E, F, G 称为第一类基本量，且

$$\mathrm{I} = \mathrm{d}P\cdot\mathrm{d}P = E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2.$$

由上一节可知 $\mathrm{d}u(X) = a, \mathrm{d}v(X) = b$，所以 $E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2$ 正好把上面的计算写成一个二次型。这里的乘积是对称乘积，而不是后面将引入的外积；例如 $\mathrm{d}u^2$ 在 (X, X) 上取值为 a^2。

要计算 X, Y 的内积，可以先算出 $X+Y, X, Y$ 的长度平方，再用极化公式求得；也可以直接展开。若 $Y = cP_u + dP_v$，则

$$\mathrm{I}(X, Y) = Eac + F(ad + bc) + Gbd.$$

正则性给出 $E > 0$ 和 $EG - F^2 = \|P_u \times P_v\|^2 > 0$，所以 g 正定。

E, F, G 是同一个内积在坐标基 P_u, P_v 下的记录。换一组参数后，基和系数都会改变，我们应当检查二者是否恰好配合，使向量的长度与夹角不变。

命题 3.3.2 (基本量的变换与基本形式的不变性). 将参数变换的偏导数按行排列，令

$$J = \begin{pmatrix} u_{\tilde{u}} & v_{\tilde{u}} \\ u_{\tilde{v}} & v_{\tilde{v}} \end{pmatrix}.$$

则 $\tilde{g} = JgJ^T$，而 I 是与参数无关的双线性形式。

证明. 一方面，将 $\mathrm{d}u, \mathrm{d}v$ 用新参数的微分表示，得到

$$\begin{aligned} \mathrm{d}P &= P_u(u_{\tilde{u}}\mathrm{d}\tilde{u} + u_{\tilde{v}}\mathrm{d}\tilde{v}) + P_v(v_{\tilde{u}}\mathrm{d}\tilde{u} + v_{\tilde{v}}\mathrm{d}\tilde{v}) \\ &= (P_u u_{\tilde{u}} + P_v v_{\tilde{u}})\mathrm{d}\tilde{u} + (P_u u_{\tilde{v}} + P_v v_{\tilde{v}})\mathrm{d}\tilde{v}. \end{aligned}$$

另一方面，直接用新参数计算同一个位置微分，得到

$$\mathrm{d}P = P_{\tilde{u}}\mathrm{d}\tilde{u} + P_{\tilde{v}}\mathrm{d}\tilde{v}.$$

对比两个坐标微分的系数，便得到新旧切向基的关系。把它与坐标微分的换元公式一起写成矩阵，就是

$$\begin{pmatrix} P_{\tilde{u}} \\ P_{\tilde{v}} \end{pmatrix} = J\begin{pmatrix} P_u \\ P_v \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \mathrm{d}u \\ \mathrm{d}v \end{pmatrix} = J^T\begin{pmatrix} \mathrm{d}\tilde{u} \\ \mathrm{d}\tilde{v} \end{pmatrix}.$$

前一式取 Gram 矩阵得 $\tilde{g} = JgJ^T$；后一式代入二次型得

$$(\mathrm{d}\tilde{u}, \mathrm{d}\tilde{v})\tilde{g}\begin{pmatrix} \mathrm{d}\tilde{u} \\ \mathrm{d}\tilde{v} \end{pmatrix} = (\mathrm{d}u, \mathrm{d}v)g\begin{pmatrix} \mathrm{d}u \\ \mathrm{d}v \end{pmatrix}.$$

故基本量改变，所表示的内积不变。若采用通常以列排列的 Jacobi 矩阵 $A = J^T$，同一公式写成 $\tilde{g} = A^T g A$。 □

有了内积以后，就可以做很多事情：计算向量的模长与夹角，判断两个方向是否正交，再沿曲线积分得到弧长。由于这些计算只用到第一基本形式，我们可以直接在曲面坐标中完成它们。

命题 3.3.3 (长度、夹角与正交条件). 对非零切向量 X, Y，有

$$\|X\| = \sqrt{\mathrm{I}(X, X)}, \qquad \cos\angle(X, Y) = \frac{\mathrm{I}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{I}(X, X)\mathrm{I}(Y, Y)}}.$$

因此 $X \perp Y$ 当且仅当 $\mathrm{I}(X, Y) = 0$，特别地，两族参数曲线正交当且仅当 $F = 0$。曲线 $c(t) = P(u(t), v(t))$ 的长度为

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}\,\mathrm{d}t.$$

证明. 前两式是内积的基本性质。对曲线使用 $c' = u'P_u + v'P_v$，代入 $\|c'\| = \sqrt{\mathrm{I}(c', c')}$ 并积分即可。 □

长度使用一条切向量，面积则应使用两条独立切向量张成的平行四边形；其面积由同一个度量矩阵决定。

命题 3.3.4 (面积元). 正则曲面片的面积元为 $\mathrm{d}A = \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$；因而对其中区域 $P(D_0)$，

$$A(P(D_0)) = \iint_{D_0} \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

证明. 在参数域中取边长为 $\Delta u, \Delta v$ 的小矩形。四条边映到曲面上，通常成为四条曲线，所以得到的是一个曲边小块，不能直接把它当成平面矩形。

但是，在矩形足够小时，从同一顶点出发的两条边，其位移分别以 $P_u\Delta u, P_v\Delta v$ 为一阶近似。于是曲面小块可以用这两个切向量张成的平行四边形近似，其面积为

$$\|(P_u\Delta u) \times (P_v\Delta v)\| = \|P_u \times P_v\||\Delta u\Delta v|.$$

这里两条边一般不垂直，因而不能直接把它们的长度相乘。叉积恰好同时包含边长和夹角的信息，而且

$$\|P_u \times P_v\|^2 = (P_u \cdot P_u)(P_v \cdot P_v) - (P_u \cdot P_v)^2 = EG - F^2.$$

利用曲面在紧子域上一阶近似的一致性，将区域分割、求和并取极限，就得到所述面积积分。换参数时 $\sqrt{\det \tilde{g}} = |\det J|\sqrt{\det g}$，恰与积分的换元公式一致。 □

若参数化非单射，上式计算的是计重面积，不能直接当作像集的面积。至此，同一个内积已经给出了长度、夹角和面积。它能否同时区分曲面在空间中的形状？先比较两个熟悉的曲面。

例 3.3.5 (平面与圆柱的度量). 设 $a > 0$，取平面与圆柱的参数化

$$P(u, v) = (u, v, 0),$$
$$\widetilde{P}(u, v) = (a\cos(u/a), a\sin(u/a), v).$$

圆柱的 u 参数已经是圆周弧长，故两种参数化均有 $E = G = 1, F = 0$，即

$$\mathrm{I} = \mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2.$$

因此，相同参数曲线在两张曲面上具有相同的长度，对应切向量的夹角和区域的面积也相同。取 u 在长度小于 $2\pi a$ 的区间内，便可把这一对应看作圆柱片的展开。这里第一基本形式相同，空间形状却不同。

现在再回到前面的问题。第一基本形式并不是另造了一个与空间内积不同的运算，它正是空间内积在各个切空间上的限制。改变参数时，变的是表示这个内积的基与系数，内积本身没有改变；空间 Euclid 内积也同样不会因正交坐标的改变而改变，所以不能用“是否依赖坐标”来区分二者。

这里所谓内蕴，是说一旦给定第一基本形式，长度、夹角和面积便可以只根据曲面上的坐标与度量计算，无需再知道曲面具体怎样放在空间中。平面与圆柱的例子说明，

两种不同的空间形状有可能给出相同的内部测量。但这并不表示任意嵌入都诱导同一个度量：光滑曲面本身还没有指定长度，度量是额外的数据，例 3.3.5 中二者相同是计算所得的结论。

再看一个参数线同时包含直线与螺线的曲面，第一基本形式可以把这两类长度放在同一公式中。

例 3.3.6 (螺旋面的长度与面积). 对 $P(u,v)=(v\cos u, v\sin u, bu)$，$b\neq 0$，计算得 $E=v^2+b^2, F=0, G=1$，故

$$\mathrm{I}=(v^2+b^2)\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2, \qquad \mathrm{d}A=\sqrt{v^2+b^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

v 固定时参数曲线是圆柱螺线，u 固定时则是直线。若 $b=0$，这是平面的极坐标表示，须排除 $v=0$。

夹角的计算也可以反过来寻找具有特定方向的曲线。下面以参数网的角平分方向为例。

例 3.3.7 (参数网的角平分轨线). 在一般参数网中，两条单位参数切向量为 $P_u/\sqrt{E}, P_v/\sqrt{G}$。它们的和与差分别平分两条角，因此角平分方向满足

$$\sqrt{E}\,\mathrm{d}u=\pm\sqrt{G}\,\mathrm{d}v.$$

推导只用了先单位化再取和、差，因此对非正交的参数网也成立。

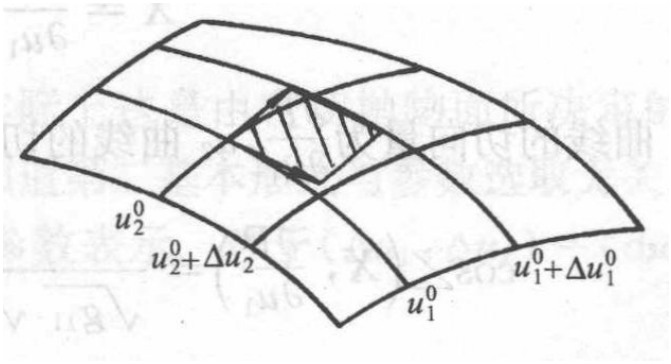


图 3.3: 以切平行四边形近似曲面参数小块，从而得到面积元。

3.4 第二基本形式

上一节中，平面与圆柱可以具有相同的第一基本形式，但它们在空间中的弯曲显然不同。我们需要再找一个量，记录第一基本形式没有区分的信息。

切平面已经给出一阶近似,因此可以观察附近点怎样偏离这个平面。设 $p=P(u_0,v_0)$，附近一点为 $q=P(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v)$。如果曲面就是平面，那么 $q-p$ 始终在切平面内；若曲面弯曲，附近点便可能离开这个平面。因此，我们先计算 q 到切平面的距离。

选定 p 处的单位法向量 $n(p)$，就可以规定距离的正负：沿着法向量的一侧取正，另一侧取负。于是有向距离是

$$\delta=(q-p)\cdot n(p).$$

距离本身还随所取点远近而变，不能直接作为一点处的弯曲量。我们需要看它在 $q \to p$ 时由哪一阶项控制。令 $h = (\Delta u, \Delta v)$，Taylor 展开给出

$$\begin{aligned} q - p &= P_u \Delta u + P_v \Delta v \\ &\quad + \frac{1}{2}\big(P_{uu}(\Delta u)^2 + 2P_{uv}\Delta u \Delta v + P_{vv}(\Delta v)^2\big) + o(\|h\|^2). \end{aligned}$$

所有偏导数都在 (u_0, v_0) 取值。前两个一次项是切向量，它们与 $n(p)$ 的内积为零；因此一阶近似没有法向偏离，最先可能出现的是二次项。记

$$L = P_{uu} \cdot n, \qquad M = P_{uv} \cdot n, \qquad N = P_{vv} \cdot n,$$

便得到

$$\delta = \frac{1}{2}\big(L(\Delta u)^2 + 2M\Delta u \Delta v + N(\Delta v)^2\big) + o(\|h\|^2).$$

于是，我们把这个记录二阶法向偏离的二次型单独记下来。参数增量 $h = (\Delta u, \Delta v)$ 对应的切向量为 $X_h = \Delta u P_u + \Delta v P_v$。这里的 N 是第二类基本量，与曲线的主法向量记号依语境区分。

定义 3.4.1 (第二基本形式). 固定局部单位法向量 n 后，定义第二基本形式

$$\mathrm{II} = L\mathrm{d}u^2 + 2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N\mathrm{d}v^2, \qquad b = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

L, M, N 称为第二类基本量。其几何意义是：$\dfrac{1}{2}\mathrm{II}(X_h, X_h)$ 是邻近点到切平面的有向距离的二阶近似。

如果某个方向上的二次项为零，这个展开就还不能确定沿该方向偏离切平面的首个非零项，需要继续考察更高阶项。[1]

我们也可以通过法向量的变化观察弯曲：切平面转动时，它的单位法向量也随之转动。下面的等式将这两种观察联系起来。

命题 3.4.2 (第二基本形式的等价表达). 有

$$\mathrm{II} = \mathrm{d}^2 P \cdot n = -\mathrm{d}P \cdot \mathrm{d}n,$$

以及 $L = -P_u \cdot n_u$，$M = -P_u \cdot n_v = -P_v \cdot n_u$，$N = -P_v \cdot n_v$。

证明. 法向量与每个切向量正交，所以 $P_u \cdot n = P_v \cdot n = 0$。例如，对第一式求 v 导数，乘积法则给出

$$P_{uv} \cdot n + P_u \cdot n_v = 0, \qquad M = -P_u \cdot n_v.$$

对第二式求 u 导数又得到 $M = -P_v \cdot n_u$。同样地，对第一式求 u 导数、第二式求 v 导数，得到 $L = -P_u \cdot n_u, N = -P_v \cdot n_v$。因而

$$\begin{aligned} -\mathrm{d}P \cdot \mathrm{d}n &= -\big(P_u \mathrm{d}u + P_v \mathrm{d}v\big) \cdot \big(n_u \mathrm{d}u + n_v \mathrm{d}v\big) \\ &= L\mathrm{d}u^2 + 2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N\mathrm{d}v^2 = \mathrm{II}. \end{aligned}$$

[1] 沿固定方向且二次项非零时，展开也给出 $\mathrm{II}/\delta \to 2$；这个比值表达依赖非零条件，而二阶展开本身没有这一限制。

这说明邻近点偏离切平面与法向量转动这两种观察，给出了同一个二次型。这里 d^2P 指坐标二阶表达式 $P_{uu}\mathrm{d}u^2+2P_{uv}\mathrm{d}u\mathrm{d}v+P_{vv}\mathrm{d}v^2$，不是外微分的平方；后者将在第 四 章中恒等于零。 □

二阶偏导本身会在换参数时出现额外项，因此需要验证取法向分量后是否仍表示同一个二次型。

命题 3.4.3 (换参数与改变法向). 若固定同一个几何法向量场，则 $\tilde{b}=JbJ^T$，所以 II 与参数无关。若新旧法向量各自由参数叉积诱导，则

$$\tilde{b}=\operatorname{sgn}(\det J)JbJ^T.$$

反向选择 n 时，整个 II 变号。

证明. 先具体考察一个系数。对 $P_{\tilde{u}}=P_uu_{\tilde{u}}+P_vv_{\tilde{u}}$ 再求一次导数，得到

$$\begin{aligned}P_{\tilde{u}\tilde{u}}=&P_{uu}u_{\tilde{u}}^2+2P_{uv}u_{\tilde{u}}v_{\tilde{u}}+P_{vv}v_{\tilde{u}}^2\\&+P_uu_{\tilde{u}\tilde{u}}+P_vv_{\tilde{u}\tilde{u}}.\end{aligned}$$

最后两个就是二阶求导产生的额外项；但它们沿着切平面，与 n 作内积后消失。因此

$$\widetilde{L}=Lu_{\tilde{u}}^2+2Mu_{\tilde{u}}v_{\tilde{u}}+Nv_{\tilde{u}}^2.$$

同样计算 $\widetilde{M},\widetilde{N}$，恰好得到 $\tilde{b}=JbJ^T$。若使用参数诱导的法向量，再由叉积变换式乘上 $\operatorname{sgn}(\det J)$。二次型与微分坐标配对后不变，变号只来自法向的改变。 □

现在回到例 3.3.5。平面的法向量恒定，所以 $\mathrm{II}=0$。圆柱取外法向 $n=(\cos(u/a),\sin(u/a),0)$，则

$$n_u=\frac{1}{a}\widetilde{P}_u,\qquad n_v=0,\qquad \mathrm{II}=-\frac{1}{a}\mathrm{d}u^2.$$

所以第二基本形式区分了这两张具有相同度量的曲面：圆柱沿圆周方向弯曲，沿母线方向法向量不变。

球面则在各个切方向上同样弯曲。更一般地，若二阶偏离总是长度平方的同一个倍数，是否就只能得到平面或球面？下面从法向量的变化回答这个问题。

命题 3.4.4 (处处各向同性的曲面). 若连通曲面上 $\mathrm{II}=c\mathrm{I}$（允许 c 随点变化），则 c 必为常数；曲面是一个平面或一个球面的开部分。

证明. 由 $n_i\cdot P_j=-cP_i\cdot P_j$ 及 n_i 切向，得 $n_u=-cP_u,n_v=-cP_v$。混合偏导相等给出 $c_vP_u=c_uP_v$，由独立性知 $c_u=c_v=0$。连通性使局部常数成为全局常数。若 $c=0$，n 固定且 $P\cdot n$ 为常数，故在平面内；若 $c\neq0$，$\mathrm{d}(P+n/c)=0$，所以球心固定，半径为 $1/|c|$。由于参数化正则，其像在相应平面或球面中是开集。 □

例如半径 a 的球面取外法向时 $n=P/a$，故 $\mathrm{II}=-\mathrm{I}/a$。负号也符合距离的解释：球面邻近点位于切平面的内侧，其相对于外法向的有向距离为负。

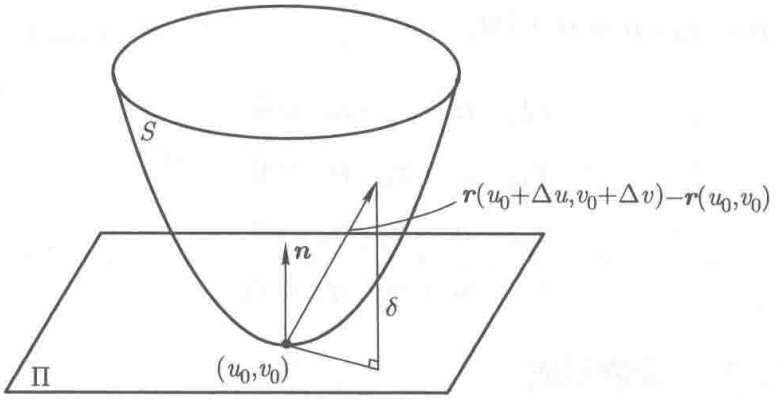


图 3.4: 邻近点到切平面的有向距离 δ，其二阶近似由第二基本形式给出。

3.5 法曲率函数

上一节定义的第二基本形式刻画了曲面在每一点处的二阶弯曲。从另一个角度来考虑曲面的弯曲程度，观察曲面上的曲线，会发现曲线的弯曲性质会受到曲面的制约。例如，直线是不可能放到球面上去的，即在球面上不存在曲率为零的正则曲线。而曲线的弯曲性质我们在曲线论中已经讨论过了，由此启发我们借助于落在曲面上面的曲线的弯曲性质来刻画曲面的弯曲状况。

但是，对于曲面上某一点，仅仅凭过这一点的曲线的曲率向量，是无法刻画曲面的弯曲程度的。例如，在一个平面上，我们可以随意画出各种弯曲的曲线，这些曲线的曲率可能很大，但平面确实是没有弯曲的。这是因为这些曲线的弯曲并不是由于所在曲面的结构而“不得不”发生的弯曲。另一个例子是球面上的曲线曲率不可能为零，这说明球面上的曲线确实由于球面的结构而不得不发生弯曲。所以，我们需要从曲率向量中分离出由曲面所决定的部分。

平面的例子还给出了一个启发：无论平面内的曲线怎样转弯，它的加速度仍在这个平面内，沿曲面法向的分量恒为零。于是，我们尝试把曲线的曲率向量投影到曲面法向上。这样可以去掉曲线在切平面内自行转弯的部分。圆柱面上的直线母线则提醒我们：即使曲面不是平面，某些方向的法向弯曲仍可以为零，因而最后得到的量还应当允许随方向改变。

这个想法是否可行，需要计算验证。固定曲面上一点 p，设经过它的曲线以弧长 s 为参数，写成 $c(s) = P(u(s), v(s))$。依次求导得

$$\begin{aligned} c' &= P_u u' + P_v v', \\ c'' &= P_{uu}(u')^2 + 2P_{uv}u'v' + P_{vv}(v')^2 + P_u u'' + P_v v''. \end{aligned}$$

这里 u'', v'' 还含有曲线本身如何转弯的信息。与曲面单位法向量 n 作内积时，最后两个切向项恰好消失，留下

$$c'' \cdot n = L(u')^2 + 2Mu'v' + N(v')^2.$$

右端只含曲面在该点的第二类基本量，以及曲线的两个速度分量 u', v'。因此，只要两条曲线在 p 处具有相同的单位切向量，它们的这个法向分量就相同，曲线其余部分如何选取已经没有影响。

我们使用的是弧长参数，所以还有

$$1 = \|c'\|^2 = E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2.$$

若给定的只是任意非零切向量 $X = aP_u + bP_v$，就先把它除以长度化成单位向量。二次型因此要除以长度平方，所得的值为 $\mathrm{II}(X,X)/\mathrm{I}(X,X)$。分子记录法向弯曲，分母消去向量大小的影响，于是这个比值只与切方向有关，可以不再借助某一条具体曲线来定义。

定义 3.5.1 (法曲率). 对 $X = aP_u + bP_v \neq 0$，定义

$$\kappa_n(X) = \frac{\mathrm{II}(X,X)}{\mathrm{I}(X,X)} = \frac{La^2 + 2Mab + Nb^2}{Ea^2 + 2Fab + Gb^2}.$$

它在非零倍数下不变，因而是无向切方向的函数，不在零向量处定义。若 $\kappa_n(X) = 0$，称该方向为渐近方向。

把 X 换成 λX 时，分子与分母同乘 λ^2，所以比值不变，这也直接验证了它只依赖方向。若用斜率 a/b 记录方向，$b = 0$ 的方向还须另行讨论；上述齐次表达则同时包含所有非零方向。

法曲率虽然由曲率向量的一个分量得到，是否也能直接解释成某条平面曲线的曲率？给定 p 处的切方向 X，取经过 p、由 X 与 $n(p)$ 张成的平面。这称为该方向的法截面，它与曲面的局部交线称为法截线。法截面与曲面的切平面沿 X 方向相交，且并非同一平面，因此交线在 p 附近正则，并以 X 为切方向。

将法截线也用弧长参数化。因为它是一条平面曲线，加速度仍在法截面内；又因为速度恒为单位长度，加速度垂直于 X。在由 X, n 张成的平面里，同时满足这两个条件的方向就是 n。因此，法截线的加速度没有切平面内的分量，它的全部弯曲恰好就是上面分离出的法向弯曲。

定理 3.5.2 (法截线解释与 Meusnier 定理). $\kappa_n(X)$ 等于法截线在由 (X,n) 定向的法截面内的相对曲率。任一具有同样单位切向量的曲面曲线满足

$$c'' \cdot n = \kappa_n.$$

若该曲线的曲率 $\kappa > 0$，主法向量为 N，则

$$\kappa_n = \kappa \cos \angle(N, n).$$

证明. 首式由法截线的加速度为 $\kappa_n n$ 得到。一般曲线的结论正是本节开头的计算；当 $\kappa > 0$ 时代入 $c'' = \kappa N$ 即得 Meusnier 公式。$\kappa = 0$ 时主法向量未必有定义，但向量形式仍然成立。 □

例 3.5.3 (球面上的小圆). 半径 a 的球面取外法向，有 $\kappa_n = -1/a$。余纬为 $\varphi \in (0,\pi)$ 的纬圆曲率为 $1/(a\sin\varphi)$，其主法向量指向纬圆圆心，故 $N \cdot n = -\sin\varphi$。二者相乘确为 $-1/a$。图 3.5 展示相切的法截线与斜截线之间的关系。

接下来想找出弯曲最大与最小的方向。直接对上面的分式求极值当然可行，但 $\mathrm{II} = -\mathrm{d}P \cdot \mathrm{d}n$ 提供了另一条路线：把法向量的变化看成一个线性变换，再利用线性代数研究它。

这里 $\mathrm{d}n_p(X)$ 有具体的含义。取 $c(0)=p, c'(0)=X$，沿曲线观察单位法向量 $n(c(t))$，则

$$\mathrm{d}n_p(X)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} n(c(t)).$$

若 $X=aP_u+bP_v$，它就是 an_u+bn_v。因而它记录沿 X 移动时法向量的瞬时变化，且只依赖 X，不依赖所选曲线的其他信息。由 $n\cdot n=1$，这个变化向量垂直于 n，仍落在 T_pS 内。

现在把负号一并吸收到变换中，法曲率的分子便写成 $\langle -\mathrm{d}n(X), X\rangle$。这正是一个线性变换所对应的二次型，极值问题由此可以转化为特征值问题。

定义 3.5.4 (Weingarten 变换). 定义 $W_p: T_pS\to T_pS$ 为 $W_p(X)=-\mathrm{d}n_p(X)$，称为 Weingarten 变换（形算子）。

由 $n\cdot n=1$ 得 $\mathrm{d}n(X)\perp n$，所以它确实取值于切空间。又

$$\langle WX, Y\rangle=\mathrm{II}(X,Y)=\mathrm{II}(Y,X)=\langle X, WY\rangle,$$

故 W 自伴。要在坐标中找到这个变换，设它在基 P_u, P_v 下的矩阵为 A，向量 X, Y 的列坐标为 x, y。由于

$$\mathrm{I}(X,WY)=x^T gAy,\qquad \mathrm{II}(X,Y)=x^T by,$$

对任意 x, y 相等，便有 $gA=b$，即 $A=g^{-1}b$。这也解释了为什么不能直接把 b 的特征值当成主曲率：P_u, P_v 一般不是单位正交基，必须先用 g 校正长度与夹角。矩阵 $g^{-1}b$ 未必对通常的点积对称，但它对切空间上的内积 g 自伴。

自伴性提供两个正交特征方向，法曲率在这些方向上不再混合；它们正是描述弯曲所需的特殊方向。

定义 3.5.5 (主曲率、主方向与脐点). W 的两个特征值 κ_1, κ_2 称为主曲率，相应非零特征向量的方向称为主方向。若 $\kappa_1=\kappa_2$，称该点为脐点；其中二者皆零时称为平点。切线处处为主方向的正则曲线称为曲率线。

已知两个主曲率和相应的主方向，就可以把任一单位切向量分解到这两个主方向上，用上式算出该方向的法曲率。

定理 3.5.6 (Euler 公式与主曲率的极值意义). 若 e_1, e_2 为单位正交主方向，$X=\cos\theta\, e_1+\sin\theta\, e_2$，则

$$\kappa_n(X)=\kappa_1\cos^2\theta+\kappa_2\sin^2\theta.$$

因此主曲率是法曲率的最大值与最小值；在非脐点处两个主方向相互垂直。

证明. 将分解式代入 $\kappa_n(X)=\langle WX, X\rangle$，交叉项由正交性消失。右侧为两个特征值的凸组合，且在对应方向取到端点值。不同特征值的特征向量正交，这是自伴性的直接推论。 □

在例 3.3.5 的圆柱上，$\widetilde{P}_u, \widetilde{P}_v$ 已是单位正交主方向，对外法向的主曲率分别为 $-1/a, 0$。与圆周方向夹角为 θ 的单位向量满足

$$\kappa_n = -\frac{\cos^2\theta}{a}.$$

从圆周方向转到母线方向，法曲率由 $-1/a$ 连续变到 0；球面则因两个主曲率相同，所有方向的法曲率都等于 $-1/a$。Euler 公式因此同时包含了方向有差别与没有差别的两种情形。

实际计算时，无需求出单位主标架：先解

$$\det(b-\lambda g) = (EG-F^2)\lambda^2 - (LG-2MF+NE)\lambda + LN - M^2 = 0, \tag{3.5.1}$$

再解 $(b-\lambda g)(a, b_0)^T = 0$。这里用 b_0 表示第二个分量，以免与矩阵 b 混淆。消去 λ 可得主方向方程

$$(EM-FL)\mathrm{d}u^2 + (EN-GL)\mathrm{d}u\mathrm{d}v + (FN-GM)\mathrm{d}v^2 = 0.$$

渐近方向则满足 $L\mathrm{d}u^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N\mathrm{d}v^2=0$: 非零二次型有实方向当且仅当 $LN-M^2 \le 0$；若 $b=0$，所有方向都是渐近方向。

例 3.5.7 (旋转椭球上的主曲率). 取 $P(u,v) = (\cos u\cos v, \cos u\sin v, 3\sin u)$，在 $u=0, v=\pi/4$，

$$\begin{aligned} P_u &= (0,0,3),\\ P_v &= (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0),\\ n &= (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0). \end{aligned}$$

直接求二阶偏导得 $g = \mathrm{diag}(9,1)$，$b = \mathrm{diag}(1,1)$。第二基本形式的两个坐标系数虽然相等，但 P_u 的长度是 P_v 的三倍；比较单位方向的弯曲时，必须把这个差别除去。于是 $g^{-1}b = \mathrm{diag}(1/9, 1)$，主曲率为 $1/9, 1$，主方向分别为竖直方向和赤道切向。较长的竖直截面在此处弯曲较缓。

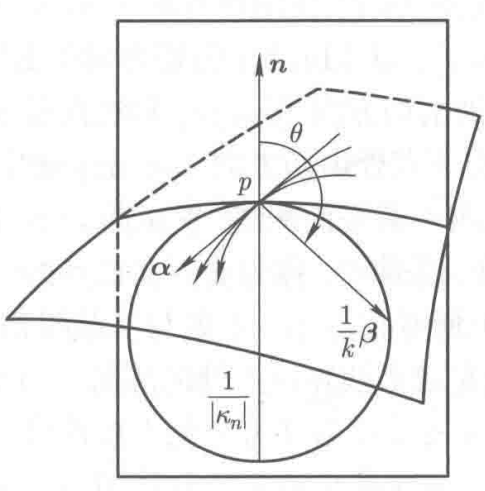


图 3.5: 相切曲线的曲率中心；图中 α, β 分别对应 T, N，θ 为主法向量与曲面法向量的夹角。

3.6 曲面在一点处的标准展开

把原点放在曲面点 p，z 轴取为法向，x, y 轴取为两个单位主方向。局部图像 $z = f(x, y)$ 满足 $f(0) = f_x(0) = f_y(0) = 0$，且 Hesse 矩阵正好是第二基本形式的矩阵，因此

$$z = \frac{1}{2}(\kappa_1 x^2 + \kappa_2 y^2) + o(x^2 + y^2). \tag{3.6.1}$$

为什么这里恰好出现主曲率？所选 x, y 方向单位正交，所以原点处第一基本形式的矩阵为单位阵。又因 z 轴为法向，第二基本形式的矩阵就是

$$\begin{pmatrix} f_{xx}(0) & f_{xy}(0) \\ f_{xy}(0) & f_{yy}(0) \end{pmatrix}.$$

把坐标轴取在主方向上，正是把这个对称矩阵对角化，故三个系数分别为 $\kappa_1, 0, \kappa_2$。这样做没有改变曲面，只是选择了一组最能显示弯曲的坐标。

式 (3.6.1) 中的二次曲面叫作密切抛物面。它说明同一切平面上的不同方向可以有不同的二阶偏离：沿 x 轴走同样的距离，偏离主要由 κ_1 控制；沿 y 轴则由 κ_2 控制。两个主曲率同号时朝同一侧弯，异号时则朝相反两侧弯。

为了在一张平面图上看见这种方向差异，可以在密切抛物面上取一个固定的高度 $z = h$，再把截线投到切平面上，得到 $\kappa_1 x^2 + \kappa_2 y^2 = 2h$。除去高度带来的共同缩放，便得到下面的指标线。它所记录的是二阶近似；原曲面的截线还可能受到高阶项影响。

定义 3.6.1 (Dupin 指标线). 切平面中满足 $\mathrm{II}(X, X) = 1$ 或 $\mathrm{II}(X, X) = -1$ 的向量端点轨迹称为 Dupin 指标线。主方向坐标下方程为 $\kappa_1 x^2 + \kappa_2 y^2 = \pm 1$。

沿单位方向 e，若 $\kappa_n(e) \neq 0$，指标线上对应半径为 $1/\sqrt{|\kappa_n(e)|}$；若法曲率为零，该方向没有有限交点。图 3.6 中的椭圆、双曲线与平行直线对应三种不同弯曲情形。

主曲率的和与积不依赖两个主方向的排列，适合概括一点处的曲率；其积还不依赖法向的正负选择。

定义 3.6.2 (Gauss 曲率与平均曲率). 定义

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = \det W = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$
$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)}.$$

若 $K > 0$、$K < 0$ 或 $K = 0$，分别称该点为椭圆点、双曲点或抛物点；本笔记依主教材将平点也包括在 $K = 0$ 的情形内。改变法向时 H 变号而 K 不变。

在椭圆点，二次型定号，曲面在足够小邻域内位于切平面一侧；在双曲点，二次型不定，曲面穿过切平面，并有两个渐近方向。在非平的抛物点，指标线为两条平行直线，只有一个渐近方向。平点的二次项全消失，必须查看更高阶项，不能由 $K = 0$ 断言曲面局部就是平面。熟悉的三个曲面可以帮助区分这些量。平面有 $K = H = 0$；半径 a 的圆柱取外法向时有 $K = 0, H = -1/(2a)$；球面则有 $K = 1/a^2, H = -1/a$。圆柱的 $K = 0$ 来自一个主曲率为零，并不要求两个主曲率都为零。下面再用局部图像观察曲率符号与切平面的位置关系。

例 3.6.3 (三种局部图像). 在原点取向上的法向：$z=(x^2+y^2)/2$ 的主曲率为 $1,1$；$z=(x^2-y^2)/2$ 为 $1,-1$；$z=x^2/2$ 为 $1,0$。图像 $z=x^4-y^4$ 在原点是平点，却同时出现在切平面两侧。这说明平点的一阶、二阶数据不足以判断其高阶形状。

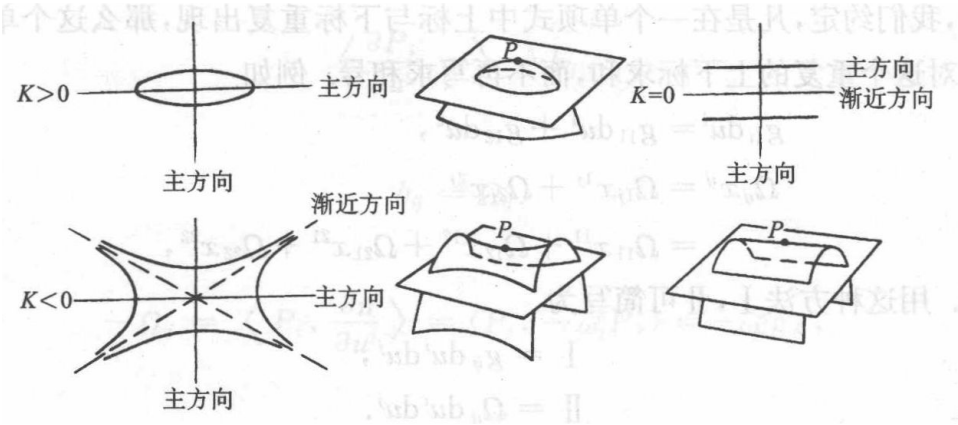


图 3.6: Dupin 指标线与曲面的局部形状。

3.7 结构方程

曲线的 Frenet 公式把标架的导数重新写成标架向量的线性组合。现在对曲面也做同样的事，只是有 u,v 两个求导方向。先使用自然标架 $\{P_u,P_v,n\}$，例如

$$\begin{aligned}P_{uu}&=\Gamma_{11}^1P_u+\Gamma_{11}^2P_v+Ln,\\P_{uv}&=\Gamma_{12}^1P_u+\Gamma_{12}^2P_v+Mn,\\P_{vv}&=\Gamma_{22}^1P_u+\Gamma_{22}^2P_v+Nn.\end{aligned}$$

法向系数已经知道，正是第二类基本量。新出现的 Γ_{ij}^k 暂时只是切向展开系数：下标 i,j 表示对哪两个参数求导，上标 k 表示取第几个基向量的分量。我们还要从已知数据中求出它们，而不是另添一批独立的几何量。

为了同时处理这三条式子，并避免逐项重复，记 $u^1=u,u^2=v,P_i=\partial_iP,g_{ij}=P_i\cdot P_j$，$b_{ij}=P_{ij}\cdot n$，$(g^{ij})=(g_{ij})^{-1}$；重复的一上一下指标求和，范围均为 $1,2$。

展开系数中的切向部分由度量的一阶导数决定，法向部分则正是第二基本形式。这将两个基本形式组织成一个微分方程组。

定理 3.7.1 (Gauss 公式与 Weingarten 公式). 有

$$P_{ij}=\Gamma_{ij}^kP_k+b_{ij}n,\qquad n_i=-b_{ij}g^{jk}P_k,\tag{3.7.1}$$

其中 Christoffel 符号为

$$\Gamma_{ij}^k=\frac{1}{2}g^{k\ell}(\partial_ig_{j\ell}+\partial_jg_{i\ell}-\partial_\ell g_{ij}).$$

证明. 在自然标架上展开 P_{ij}，与 n 作内积得法向系数 b_{ij}。另一方面，

$$2P_{ij}\cdot P_\ell=\partial_ig_{j\ell}+\partial_jg_{i\ell}-\partial_\ell g_{ij},$$

这里所用的三条乘积法则具体为

$$\partial_i g_{j\ell} = P_{ij}\cdot P_\ell + P_j\cdot P_{i\ell},$$
$$\partial_j g_{i\ell} = P_{ij}\cdot P_\ell + P_i\cdot P_{j\ell},$$
$$\partial_\ell g_{ij} = P_{i\ell}\cdot P_j + P_i\cdot P_{j\ell}.$$

前两式相加再减去第三式，恰好只留下 $2P_{ij}\cdot P_\ell$。而 $P_{ij}\cdot P_\ell = \Gamma^k_{ij} g_{k\ell}$，所以还需乘逆矩阵 $g^{k\ell}$ 才能取出展开系数。自然基一般不正交，不能直接把内积当成系数。最后，由 $n_i\cdot P_j = -b_{ij}$ 且 $n_i\cdot n = 0$，解出 n_i 的切向展开。 □

现在可以尝试把上面的公式反过来使用：若先给定 g_{ij}, b_{ij}，能否像曲线论中那样解出标架和位置？这里多了一个障碍：曲面有两个参数，沿不同方向求导必须彼此相容。具体地，$\partial_k P_{ij} = \partial_j P_{ik}$ 的切向和法向系数必须分别相等，这就给出数据应满足的条件。

定理 3.7.2 (Gauss 方程与 Codazzi 方程)**.** 自然标架满足

$$\partial_k\Gamma^\ell_{ij} - \partial_j\Gamma^\ell_{ik} + \Gamma^m_{ij}\Gamma^\ell_{mk} - \Gamma^m_{ik}\Gamma^\ell_{mj} = b_{ij}b_{ka}g^{a\ell} - b_{ik}b_{ja}g^{a\ell}, \tag{3.7.2}$$
$$\partial_k b_{ij} - \partial_j b_{ik} + \Gamma^m_{ij}b_{mk} - \Gamma^m_{ik}b_{mj} = 0. \tag{3.7.3}$$

特别地，K 可仅由第一基本形式及其至多二阶偏导表示。

证明. 将式 (3.7.1) 代入两侧混合偏导，P_ℓ 的系数分别为 $\partial_k\Gamma^\ell_{ij} + \Gamma^m_{ij}\Gamma^\ell_{mk} - b_{ij}b_{ka}g^{a\ell}$ 及交换 j,k 后的式子；n 的系数分别为 $\Gamma^m_{ij}b_{mk} + \partial_k b_{ij}$ 及交换后的式子。相减得所列方程。

在第一式取 $i=j=1, k=2$，再乘 $g_{\ell 2}$ 对 ℓ 求和，右侧成为 $b_{11}b_{22} - b_{12}^2$。除以 $\det g$ 即得 K，而左侧的 Γ 完全由 g 给出。 □

我们原本想问，给定第一、第二基本形式，需要满足哪些条件才可能有相应的曲面。计算中却得到一个额外结果：K 最初由第二基本形式定义，现在竟能只由 g 及其导数算出。因而改变曲面的空间形状时，只要内部度量保持不变，两个主曲率的乘积就不能随意改变。

定理 3.7.3 (Gauss 绝妙定理)**.** Gauss 曲率是第一基本形式的内蕴不变量：局部保长对应保持 K。

证明. 在对应参数下，两曲面的 g 相同，故由其导数计算出的 Gauss 方程左侧相同，从而 K 相同。 □

3.7.1 球面像与第三基本形式

法向量的变化还可以直接画到单位球面上：映射 $n: S\to S^2$ 称为 Gauss 映射。其微分为 $-W$，所以它的有向面积伸缩率为 $\det(-W) = K$。在 $K(p)\neq 0$ 的点附近，逆函数定理给出局部单射。若用与 n 相容的有向面积，面积比的极限为 $K(p)$；若只测量普通面积，则得到 $|K(p)|$，定向变化的信息随取绝对值而消失。

既然 I 测量切向位移的长度，也可用同样的方法测量法向量的变化；这得到一个由前两种形式决定的新二次型。

定义 3.7.4 (第三基本形式). 定义 $\mathrm{III}(X,Y)=\langle \mathrm{d}n(X),\mathrm{d}n(Y)\rangle=\langle WX,WY\rangle$，记为 $\mathrm{III}=\mathrm{d}n\cdot\mathrm{d}n$。

由 W 的特征多项式 $W^2-2HW+K\,\mathrm{id}=0$，与向量取内积得

$$\mathrm{III}-2H\mathrm{II}+K\mathrm{I}=0. \tag{3.7.4}$$

也可在主方向上分别验证：三个系数分别为 $\kappa_i^2,\kappa_i,1$，恰满足同一个二次方程。这说明第三基本形式虽换了测量对象，却没有增加独立于前两种形式的新数据。至于满足兼容条件的数据是否一定来自曲面，将在第 4.4 节完成证明。

3.8 特殊曲面

一般的曲率条件是偏微分方程，旋转对称却可把它降为常微分方程。先考虑绕 z 轴旋转的图像

$$P(u,v)=(u\cos v,u\sin v,f(u)),\qquad u>0,$$

选取 $n=(-f'\cos v,-f'\sin v,1)/\sqrt{1+f'^2}$。求一、二阶偏导得到

$$\begin{aligned}\mathrm{I}&=(1+f'^2)\mathrm{d}u^2+u^2\mathrm{d}v^2,\\ \mathrm{II}&=\frac{f''}{\sqrt{1+f'^2}}\mathrm{d}u^2+\frac{uf'}{\sqrt{1+f'^2}}\mathrm{d}v^2,\\ K&=\frac{f'f''}{u(1+f'^2)^2},\qquad 2H=\frac{uf''+f'(1+f'^2)}{u(1+f'^2)^{3/2}}.\end{aligned}$$

这里 $F=M=0$，所以经线与纬线就是主方向。

平均曲率为零的曲面在微小法向变形下具有面积驻定性；我们先从这个曲率条件定义它，再解释面积意义。

定义 3.8.1 (极小曲面). 若曲面上处处 $H=0$，称它为极小曲面。这个名称不表示任意大小的区域都实现全局最小面积。

为什么平均曲率的和会与面积联系起来？可以把曲面的一小块沿法向稍稍推开，再观察面积的一阶变化。取光滑函数 ϕ，使它在所讨论区域边界附近为零；ϕ 的正负和大小分别控制推动的方向和距离。令 $P_t=P+t\phi n$，这样边界不动，只有内部发生变化。

对参数求导时，$\partial_i(\phi n)=\phi_i n+\phi n_i$。计算 $g_{ij}(t)=\partial_i P_t\cdot\partial_j P_t$ 在 $t=0$ 的导数，含 ϕ_i,ϕ_j 的项因切法正交而消失，因而

$$\dot g_{ij}=\phi(n_i\cdot P_j+P_i\cdot n_j)=-2\phi b_{ij}.$$

面积元是 $\sqrt{\det g}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，对它求导得到

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0\mathrm{d}A_t=\frac{1}{2}\operatorname{tr}(g^{-1}\dot g)\mathrm{d}A=-2H\phi\mathrm{d}A.$$

所以所有这样的面积一阶变分均为零，当且仅当 $H=0$；必要性由任意测试函数 ϕ 得到。

在旋转曲面上，驻定条件降为上面已算出的一个一元方程，现在可以求出其全部图像解。

命题 3.8.2 (旋转极小曲面). 上述旋转图像为极小曲面，当且仅当它为平面的一部分，或满足

$$f(u) = \pm a \operatorname{arcosh}(u/a) + c, \qquad u > a > 0.$$

后者属于由悬链线旋转所得的悬链面。

证明. 令 $p = f'$，方程为 $up' + p(1+p^2) = 0$。若某点 $p = 0$，唯一性给出 $p \equiv 0$。否则分离变量得 $p/\sqrt{1+p^2} = C/u$，令 $a = |C|$，得到 $p = \pm a/\sqrt{u^2 - a^2}$，积分即得结果。 □

悬链面可用 $(a\cosh t\cos v, a\cosh t\sin v, at + c)$ 覆盖颈部；$u = a$ 处失效的是图像参数，并非曲面。另一个典型极小曲面是例 3.3.6 的螺旋面：其 $L = N = F = 0$，代入平均曲率公式即得 $H = 0$。

同一旋转模型也可研究常 Gauss 曲率；这次只需积分一次便能把问题化为求积。

命题 3.8.3 (常曲率旋转图像的方程). 上述旋转图像满足 $K = K_0$，当且仅当存在常数 C 使

$$\frac{1}{1+f'^2} = C - K_0 u^2, \qquad f' = \pm\sqrt{\frac{1 - C + K_0 u^2}{C - K_0 u^2}},$$

其中取值区间须满足 $0 < C - K_0 u^2 \le 1$，并在转折点按光滑性接合。

证明. 对 $(1+f'^2)^{-1}$ 求导得 $-2f'f''/(1+f'^2)^2 = -2K_0 u$，积分并解出 f'^2 即可；逆向求导还原原方程。 □

当 $K_0 = 0$ 时得到直线母线, 因而为平面或圆锥面的一部分。圆柱面同样满足 $K = 0$, 但不属于半径 u 作自变量的图像类型。$K_0 > 0$ 时球面给出其中一类解，而完整的局部解仍由常数 C 与取值区间共同描述。

当 $K_0 = -1/a^2, C = 0$ 时，取 $u = a\cos\varphi$，$0 < \varphi < \pi/2$，得到曳物线

$$z = a\big(\log(\sec\varphi + \tan\varphi) - \sin\varphi\big)$$

(亦可取反号和平移)。它的旋转面称为伪球面，具有常曲率 $-1/a^2$。这里保留开区间 $0 < \varphi < \pi/2$，因为在端点 $\varphi = 0$ 处该参数化退化。

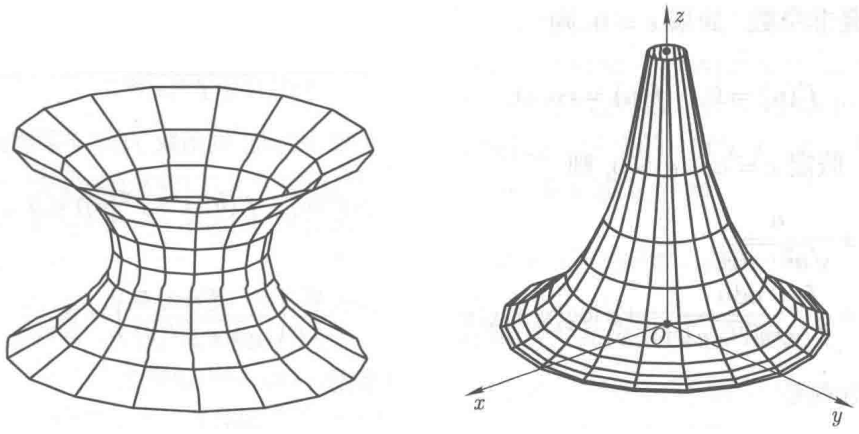


图 3.7: 悬链面与伪球面。

3.9 保长对应与保角对应

例 3.3.5 已经说明，平面与圆柱可以具有相同的内部测量，而第二基本形式仍然不同。现在将这种对应正式定义出来。比较两个曲面时，需要先给定点与点的映射，再用它的微分比较切向量。

定义 3.9.1 (保长对应与保角对应). 设 $f : S \to \widetilde{S}$ 为微分同胚。若对每点及任意切向量有

$$\widetilde{\mathrm{I}}(\mathrm{d}f(X), \mathrm{d}f(Y)) = \mathrm{I}(X, Y),$$

称 f 为保长对应（等距映射）；若右侧为 $\lambda(p)^2\mathrm{I}(X,Y)$，其中 $\lambda > 0$，则称为保角对应。定义只在邻域成立时称为局部保长或局部保角对应。

取 $\widetilde{P} = f \circ P$，将对应点使用同一组参数表示，便有保长条件 $\tilde{g} = g$、保角条件 $\tilde{g} = \lambda^2 g$。这是计算中最方便的判别。

这个内积条件应与名称吻合：一个控制所有曲线的长度，另一个控制所有切方向的夹角。利用极化公式可以证明二者确实等价。

命题 3.9.2 (长度与角度的几何判别). 微分同胚保长，当且仅当保持每条分段光滑曲线的长度；保角，当且仅当保持任意两个非零切向量的夹角。保长对应还保持面积与 Gauss 曲率。

证明. 内积不变立即保持速度模长，积分即保持曲线长度。反之，在一个曲线族的任意小参数区间上比较长度，再除以区间长度取极限，得每个切向量长度不变；再用极化公式可知，任意两个切向量的内积也保持不变。

若 $\tilde{g} = \lambda^2 g$，夹角公式中的比例消去。反之，取单位正交基 e_1, e_2，其像互相垂直；再利用 $e_1 + e_2$ 与 $e_1 - e_2$ 的像正交，得两像长度相等，记为 λ。展开任意向量得到所需内积比例式。面积由 $\det g$ 决定，Gauss 曲率则由定理 3.7.3 得到。 □

例 3.9.3 (平面与圆柱的局部保长对应). 例 3.3.5 的两种参数化均有 $\mathrm{I} = \mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2$。将相同参数的点对应起来，在长度小于 $2\pi a$ 的 u 区间上就得到保长对应。若让 u 遍历整个实轴，圆柱上的点会周期重复，所以这个公式只给出局部的展开，不能成为整个平面与圆柱之间的微分同胚。

球面则连局部展开也做不到：它的 $K = 1/a^2$ 与平面的 $K = 0$ 不同，而保长对应必须保持 Gauss 曲率。这正是绝妙定理对前面问题给出的限制。

例 3.9.4 (螺旋面与旋转双曲面的保长对应). 圆柱的例子中，相同的参数已使度量一致；下面这个例子还需要先找到合适的参数变换。考虑

$$P(u, v) = (u\cos v, u\sin v, u + v), \quad Q(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \sqrt{\rho^2 - 1}).$$

前者度量为 $2\mathrm{d}u^2 + 2\mathrm{d}u\mathrm{d}v + (1 + u^2)\mathrm{d}v^2$，后者为

$$\frac{2\rho^2 - 1}{\rho^2 - 1}\mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\mathrm{d}\theta^2.$$

在 $u>0$ 上令 $\rho=\sqrt{1+u^2}, \theta=\arctan u+v$，则 $\mathrm{d}\rho=u\mathrm{d}u/\rho$，$\mathrm{d}\theta=\mathrm{d}u/(1+u^2)+\mathrm{d}v$。代入后，$\mathrm{d}u^2$ 系数为 $(1+2u^2)/(1+u^2)+1/(1+u^2)=2$，其余系数亦相同，故给出局部保长对应。须限制角度坐标的范围以保证单射；$u=0$ 不属于这一对应的微分同胚范围。

第四章　曲面论基本定理

4.1　外微分式

第 3.7 节已经说明，曲面的第一、第二基本形式必须满足 Gauss 与 Codazzi 方程。现在反过来问：给定满足这些方程的两个二次型，是否一定能找到一个曲面，使它们恰好是这个曲面的第一、第二基本形式? 逐项处理自然标架方程会反复遇到混合偏导之差。外微分形式把这些计算统一写成 $\mathrm{d}^2=0$，也便于随后进行积分构造。

先看最简单的情形：若希望 $a\mathrm{d}u+b\mathrm{d}v$ 是某个函数的微分，就应有 $a=f_u, b=f_v$，因而必须满足 $b_u-a_v=0$。我们要建立的运算将直接记录这样的差。为此先在线性空间上定义交替形式，再让它们随曲面上的点变化。

4.1.1　交替形式与外乘法

设 T 为 n 维实向量空间。对偶空间 $T^*=\mathrm{Hom}(T,\mathbb{R})$ 中的元素称为一次形式。若 $e_1,\dots,e_n$ 是基，则由 $e^i(e_j)=\delta^i_j$ 定义对偶基；每个 $\alpha\in T^*$ 都唯一写成 $\sum_i \alpha(e_i)e^i$。

一次形式一次接收一个向量，例如 $\mathrm{d}u(aP_u+bP_v)=a$。但若想记录由两条边张成的有向面积, 一个输入就不够了, 需要同时接收两个向量。若它们的坐标分别为 $(a,b),(c,d)$，行列式 $ad-bc$ 给出有向面积：将任意一条边伸长，面积按相同比例变化；交换两条边，则定向反转，面积变号；两条边平行时面积为零。

高次形式就是把这种规则抽象出来，用来处理有向面积、体积等量。因此下面定义中的“多重线性”和“交换输入变号”分别对应这两种具体性质。

定义 4.1.1 (交替形式). k 次形式是交替的 k 重线性映射 $\alpha: T^k\to\mathbb{R}$，即

$$\alpha(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(k)})=\mathrm{sgn}(\sigma)\alpha(X_1,\dots,X_k).$$

其空间记为 Λ^kT^*，约定 $\Lambda^0T^*=\mathbb{R}$。

若输入线性相关，展开后每项都有重复输入，交换这两个输入使其等于自身的负数, 故值为零。特别地，$k>n$ 时所有 k 次形式都为零。

要将一次形式合成面积或体积形式，应把张量乘积的所有排列取带符号的平均。以下采用主教材的归一化，避免在系数中混入不同约定。

定义 4.1.2 (外乘法). 若 $\alpha\in\Lambda^kT^*,\beta\in\Lambda^\ell T^*$，定义

$$\begin{aligned}&(\alpha\wedge\beta)(X_1,\dots,X_{k+\ell})\\&\quad=\frac{1}{(k+\ell)!}\sum_{\sigma\in S_{k+\ell}}\mathrm{sgn}(\sigma)\alpha(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(k)})\beta(X_{\sigma(k+1)},\dots,X_{\sigma(k+\ell)}).\end{aligned}$$

因此 $(\alpha\wedge\beta)(X,Y)=\dfrac{1}{2}(\alpha(X)\beta(Y)-\alpha(Y)\beta(X))$。若另一本书采用无此 $1/2$ 的约定，需将其 k 次形式与本书的 $k!$ 倍对应；形式的系数运算相同，但直接代入向量时不能混用。

例如，在坐标切向量 $X = aP_u + bP_v, Y = cP_u + dP_v$ 上，

$$(\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v)(X, Y) = \frac{1}{2}(ad - bc).$$

因而这里的归一化使 $2\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v$ 直接给出坐标有向面积。另一方面，$\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}u = 0$：同一方向不能提供两条独立的边。这与第一基本形式中的 $\mathrm{d}u^2$ 很不一样，后者在 (X, X) 上给出 a^2，一般并不为零。

这个乘法应允许不加括号地连续使用，并使换位产生可控制的符号。下面的性质保证之后的形式计算有统一规则。

定理 4.1.3 (外代数的基本性质)**.** 外乘法双线性、结合，且 $\alpha \wedge \beta = (-1)^{k\ell}\beta \wedge \alpha$。此外

$$\{e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k} : i_1 < \cdots < i_k\}$$

是 $\Lambda^k T^*$ 的一组基，故其维数为 $\binom{n}{k}$。

证明. 双线性直接来自定义。交换长度为 k, ℓ 的两组输入需作 $k\ell$ 次换位，得交换律的符号。计算三者乘积时，先对其中任一组进行交替化，再对全部 $k + \ell + m$ 个输入交替化，均得到同一个全排列平均；内层排列的阶乘恰被重复计数抵消，故结合律成立。

交替多重线性形式由它在严格递增的基向量组上的值决定；而 $e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}$ 在对应基向量组上为 $1/k!$，在其他递增组上为零。因此它们线性无关，且任一 α 可展开为 $k! \sum_{i_1<\cdots<i_k} \alpha(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}$。 □

对一次形式 $\eta^a = \sum_j A_{aj} e^j$，展开并按指标排序，得到

$$\eta^1 \wedge \cdots \wedge \eta^k = \sum_{i_1<\cdots<i_k} \det(A_{a i_b})\, e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}.$$

这解释了外积与 Jacobi 行列式的关系。若基按行变换 $\tilde{e} = Ae$, 对偶基按行变换 $\tilde{e}^* = Be^*$, 则 $BA^T = I$；当 A 正交时 $B = A$。

换参数时，我们已多次把目标坐标的微分写成原坐标的微分。所谓拉回，就是把这件事推广到一般形式。假设 $L : V \to T$ 已知，而 α 只能接收 T 中的向量；要让它作用在 V 中的向量上，就先把向量经 L 送到 T，再交给 α。因此向量向前送，而得到的形式定义在原来的空间 V 上。

定义 4.1.4 (拉回)**.** 线性映射 $L : V \to T$ 的拉回 $L^* : \Lambda^k T^* \to \Lambda^k V^*$ 定义为

$$(L^*\alpha)(X_1, \ldots, X_k) = \alpha(LX_1, \ldots, LX_k).$$

光滑映射的形式拉回逐点以其微分定义。

例如平面映射 $f(u, v) = (x, y) = (u^2, v)$ 满足

$$f^*(\mathrm{d}x) = 2u\mathrm{d}u, \qquad f^*(x\mathrm{d}y) = u^2\mathrm{d}v.$$

系数先与 f 复合，坐标微分再用链式法则替换，这就是拉回的实际计算。它不要求 f 可逆：即使在 $u = 0$，拉回仍有定义。

直接代入可得 $(L \circ M)^* = M^* L^*$、$L^*(\alpha \wedge \beta) = L^*\alpha \wedge L^*\beta$；若 L 可逆，则 $(L^*)^{-1} = (L^{-1})^*$。

4.1.2 曲面上的形式与外微分

以下为避免有限可微次数的反复损失，形式代数中默认光滑；具体定理只需相应阶数的导数存在。曲面的光滑函数组成代数 $C^\infty(S)$。切向量 X_p 可作用于函数：$X_p(f)$ 是沿该方向的方向导数。切向量场因此满足 Leibniz 法则。

反过来，如果一个算子 D 满足下面的线性性和 Leibniz 法则，是否一定存在一个切向量场 X，使 $D(f)$ 就是 f 沿 X 的方向导数？下面证明答案是肯定的；这也为后面定义流形的切向量作准备。

命题 4.1.5 (导子与切向量场). $C^\infty(S)$ 上每个实线性导子 D, 即 $D(fg) = fDg + gDf$, 局部唯一表示为

$$D = (Du)\frac{\partial}{\partial u} + (Dv)\frac{\partial}{\partial v}.$$

所以导子与光滑切向量场自然对应。

证明. $D1 = 0$，故常数的导数为零。在点 p 附近由积分型 Taylor 公式写 $f - f(p) = (u - u(p))h_1 + (v - v(p))h_2$，其中 $h_i(p) = \partial_i f(p)$。Leibniz 法则在 p 给出所需公式。导子的值仅依赖函数在该点附近的值：用在更小邻域恒为 1 的光滑截断函数相乘即可证明这一局部性。因此局部计算适用于全局导子。唯一性由作用于 u, v 得到。 □

曲面上的 k 次微分形式, 就是在每一点 p 给出一个 T_pS 上的 k 次交替形式, 并要求其系数随 p 光滑变化。换言之，它在同一点接收 k 个切向量并返回一个数。局部一次形式写成 $a\mathrm{d}u + b\mathrm{d}v$, 二次形式写成 $c\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v$, 其中 a, b, c 都是光滑函数。让输入取为向量场后, 输出成为光滑函数; 这种作用对每个输入还满足 $C^\infty(S)$ 线性, 例如 $\alpha(fX) = f\alpha(X)$。

普通微分把函数变成一次形式。我们希望把它扩展到各次形式，并使混合偏导相等统一表现为同一个恒等式。

定义 4.1.6 (外微分). 定义

$$\mathrm{d}\big(f\,\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}\big) = \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k},$$

并线性延拓。曲面上特别有

$$\mathrm{d}f = f_u\mathrm{d}u + f_v\mathrm{d}v, \qquad \mathrm{d}(a\mathrm{d}u + b\mathrm{d}v) = (b_u - a_v)\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v.$$

把一次形式的计算展开，可以看清差 $b_u - a_v$ 是怎样出现的：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(a\mathrm{d}u + b\mathrm{d}v) &= (a_u\mathrm{d}u + a_v\mathrm{d}v) \wedge \mathrm{d}u + (b_u\mathrm{d}u + b_v\mathrm{d}v) \wedge \mathrm{d}v \\ &= (b_u - a_v)\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v.\end{aligned}$$

同方向的外积为零，交换 $\mathrm{d}v, \mathrm{d}u$ 的次序又产生一个负号，所以正好留下两条混合变化率之差。如果原式为 $\mathrm{d}f$，这就是 $f_{vu} - f_{uv} = 0$。因此，$\mathrm{d}^2 f = 0$ 正是将熟悉的混合偏导相等重新写成了形式运算。

这个定义还需要验证不会随坐标改变，并将平方零性质推广到各次形式。

定理 4.1.7 (外微分的基本规则). 外微分与坐标无关，满足 $\mathrm{d}^2 = 0$ 及

$$\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \mathrm{d}\beta, \quad \alpha \text{ 为} k \text{ 次形式.}$$

光滑映射 f 满足 $\mathrm{d}(f^*\alpha) = f^*(\mathrm{d}\alpha)$。上述性质连同函数的普通微分唯一确定 d。

证明. 坐标表达中，二阶导数对指标对称，外积反对称，因此 $\mathrm{d}^2 f = 0$；对一般系数形式亦然。乘积法则由对系数求导、再把 d 移过 k 个一次因子得到。对拉回后的坐标表达使用链式法则，并用 $\mathrm{d}^2 f^i = 0$（其中 f^i 为目标坐标函数的拉回），即可验证拉回等式。取 f 为坐标过渡映射，便证明坐标无关。最后，任一满足这些规则的算子作用于 $f\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots$ 都必须给出定义中的结果，所以唯一。 □

例 4.1.8 (闭形式与全微分). 若 $\alpha = a\mathrm{d}u + b\mathrm{d}v$，则 $\mathrm{d}\alpha = 0$ 等价于 $a_v = b_u$。在矩形上可令

$$F(u,v) = \int_{u_0}^{u} a(t, v_0)\mathrm{d}t + \int_{v_0}^{v} b(u,t)\mathrm{d}t,$$

求导即得 $\mathrm{d}F = \alpha$。但在穿孔平面上，$(-v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v)/(u^2+v^2)$ 虽闭，绕单位圆积分为 2π，故不是全局全微分；局部可积不能自动推出全局单值。

4.2 幺正活动标架

曲线的 Frenet 标架始终单位正交，这使它的微分方程具有反对称的系数矩阵。曲面的自然标架 P_u, P_v, n 一般没有这一便利；我们可以将两个切向量正交化，换得同样简单的内积关系。相应地，切向标架通常不再沿参数线，位置的微分也需要重新记录分量。

定义 4.2.1 (幺正活动标架及基本形式系数). 局部右手单位正交标架 $\{P; e_1, e_2, e_3\}$ 中，e_1, e_2 切向、$e_3 = n$，称为适配曲面的幺正活动标架。定义一次形式 ω_i, ω_{ij} 为

$$\mathrm{d}P = \sum_i \omega_i e_i, \qquad \mathrm{d}e_i = \sum_j \omega_{ij} e_j.$$

这里的系数为什么是一次形式，而不是普通函数？在曲线上只需沿一个参数求导；在曲面上却必须先告诉我们沿哪个切方向移动。取 $X = c'(0)$，上面的式子沿 c 就变成

$$c'(0) = \sum_i \omega_i(X) e_i,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} e_i(c(t)) = \sum_j \omega_{ij}(X) e_j.$$

所以 $\omega_i(X)$ 是移动速度在 e_i 方向的分量，$\omega_{ij}(X)$ 是第 i 个标架向量变化时沿 e_j 的分量。换一个输入方向，这些数一般会改变；对方向的依赖是线性的，故用一次形式记录。由于标架是单位正交基，展开唯一，且 $\omega_i = \mathrm{d}P \cdot e_i$，$\omega_{ij} = \mathrm{d}e_i \cdot e_j$。正交关系求微分得 $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$，又 $\omega_3 = 0$。ω_1, ω_2 是 e_1, e_2 的对偶余标架，因为 $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}$。

先看一个没有曲面弯曲、却有标架转动的例子。在平面极坐标 $P(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$ 中，取径向和圆周方向的单位向量

$$\begin{aligned} e_1 &= (\cos\theta, \sin\theta, 0), \\ e_2 &= (-\sin\theta, \cos\theta, 0), \qquad e_3 = (0,0,1). \end{aligned}$$

直接求微分得

$$\mathrm{d}P = e_1\mathrm{d}r + e_2 r\mathrm{d}\theta, \qquad \mathrm{d}e_1 = e_2\mathrm{d}\theta, \qquad \mathrm{d}e_2 = -e_1\mathrm{d}\theta.$$

因此 $\omega_1 = \mathrm{d}r, \omega_2 = r\mathrm{d}\theta, \omega_{12} = \mathrm{d}\theta$，而 $\omega_{13} = \omega_{23} = 0$。平面是平的，但我们选用的径向标架会转动，所以 ω_{12} 并不为零。这一区别在后面讨论联络时仍然重要。

为压缩式子，把 e_i 按行排列成矩阵 Y，令 $\omega = (\omega_1, \omega_2, 0)$、$\Omega = (\omega_{ij})$，则基本方程为

$$\mathrm{d}P = \omega Y, \qquad \mathrm{d}Y = \Omega Y. \tag{4.2.1}$$

矩阵值形式的乘法采用“矩阵乘法加外积”：$(A\wedge B)_{ij} = \sum_k A_{ik}\wedge B_{kj}$，$\mathrm{d}A$ 逐项求外微分。结合律与带符号的 Leibniz 法则逐项成立，矩阵乘法的次序不能交换。

现在对基本方程再求一次外微分，位置与标架的存在将迫使系数满足相应约束。这就是自然标架兼容条件的紧凑写法。

引理 4.2.2 (标架的结构方程)**.** 有

$$\mathrm{d}\omega = \omega\wedge\Omega, \qquad \mathrm{d}\Omega = \Omega\wedge\Omega. \tag{4.2.2}$$

分量形式为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega_1 &= \omega_{12}\wedge\omega_2, & \mathrm{d}\omega_2 &= -\omega_{12}\wedge\omega_1, \\ 0 &= \omega_1\wedge\omega_{13} + \omega_2\wedge\omega_{23}, & \mathrm{d}\omega_{12} &= -\omega_{13}\wedge\omega_{23}, \\ \mathrm{d}\omega_{13} &= \omega_{12}\wedge\omega_{23}, & \mathrm{d}\omega_{23} &= -\omega_{12}\wedge\omega_{13}. \end{aligned}$$

证明. 对 $\mathrm{d}P = \omega Y$ 求微分，得 $0 = (\mathrm{d}\omega - \omega\wedge\Omega)Y$；对 $\mathrm{d}Y = \Omega Y$ 求微分，得 $0 = (\mathrm{d}\Omega - \Omega\wedge\Omega)Y$。$Y$ 可逆，所以得到矩阵式。展开各矩阵元并用反对称性即得分量式。 □

在二维中，任一一次形式唯一写成 $f\omega_1 + g\omega_2$，任一二次形式唯一写成 $h\omega_1\wedge\omega_2$。因此结构方程也能反过来决定某些未知系数。

引理 4.2.3 (Cartan 引理的二维形式)**.** 若 $\eta_1\wedge\omega_1 + \eta_2\wedge\omega_2 = 0$，则存在函数 a,b,c 使

$$\eta_1 = a\omega_1 + b\omega_2, \qquad \eta_2 = b\omega_1 + c\omega_2.$$

证明. 写 $\eta_1 = a\omega_1 + b\omega_2, \eta_2 = d\omega_1 + c\omega_2$，代入得 $(d-b)\omega_1\wedge\omega_2 = 0$；余标架独立，所以 $d = b$。 □

应用于结构方程的第三式，得到 $\omega_{13} = a\omega_1 + b\omega_2$、$\omega_{23} = b\omega_1 + c\omega_2$。此外，前两式唯一决定 ω_{12}：若 $\mathrm{d}\omega_1 = A\omega_1\wedge\omega_2$、$\mathrm{d}\omega_2 = B\omega_1\wedge\omega_2$，则 $\omega_{12} = A\omega_1 + B\omega_2$。这一唯一性将使我们仅由度量求出 Gauss 曲率。

4.3 基本形式与 Gauss 曲率

外积记录定向面积，基本形式却是对称二次型，二者不能混同。对一次形式定义对称积

$$(\alpha\beta)(X,Y)=\frac{1}{2}\big(\alpha(X)\beta(Y)+\alpha(Y)\beta(X)\big).$$

它双线性且交换。任意对称双线性形式 B 都可在一组对偶基 ω_i 下写成 $\sum B(e_i,e_j)\omega_i\omega_j$，这是直接展开 X,Y 所得。

在单位正交标架下度量矩阵是单位阵，因此前一章的各曲率量应当大幅简化。将 $\mathrm{d}P,\mathrm{d}n$ 的标架表达式代入即可得到它们。

引理 4.3.1 (基本形式的正交标架表达). 若 $\omega_{13}=a\omega_1+b\omega_2$、$\omega_{23}=b\omega_1+c\omega_2$，则

$$\begin{aligned}\mathrm{I}&=\omega_1^2+\omega_2^2, & K&=ac-b^2,\\ \mathrm{II}&=a\omega_1^2+2b\omega_1\omega_2+c\omega_2^2, & H&=(a+c)/2.\end{aligned}$$

并且 $\mathrm{d}\omega_{12}=-K\omega_1\wedge\omega_2$。

证明. $\mathrm{d}P=\omega_1e_1+\omega_2e_2$，$\mathrm{d}n=-\omega_{13}e_1-\omega_{23}e_2$。分别取 $\mathrm{d}P\cdot\mathrm{d}P$ 和 $-\mathrm{d}P\cdot\mathrm{d}n$ 即得前两式。形算子在此标架下矩阵为 $\left(\begin{smallmatrix}a&b\\b&c\end{smallmatrix}\right)$，取行列式和半迹得到 K,H。结构方程再给出 $\mathrm{d}\omega_{12}=-\omega_{13}\wedge\omega_{23}=-(ac-b^2)\omega_1\wedge\omega_2$。□

这里 ω_{12} 记录切向标架在切平面内的转动，而 $\mathrm{d}\omega_{12}=-K\omega_1\wedge\omega_2$ 把这种转动与曲率联系起来。关键在于上一节已证明 ω_{12} 由余标架唯一确定，所以我们可以完全从度量开始计算：先对正定二次型 I 配方，例如

$$\omega_1=\sqrt{E}\,\mathrm{d}u+\frac{F}{\sqrt{E}}\mathrm{d}v,\qquad \omega_2=\sqrt{G-F^2/E}\,\mathrm{d}v.$$

这里的配方恰好满足 $\omega_1^2+\omega_2^2=\mathrm{I}$，所以与它对偶的切向标架自动正交。再写未知形式 $\omega_{12}=f\omega_1+h\omega_2$，代入

$$\mathrm{d}\omega_1=\omega_{12}\wedge\omega_2,\qquad \mathrm{d}\omega_2=-\omega_{12}\wedge\omega_1.$$

第一式右端只留下 $f\omega_1\wedge\omega_2$，第二式只留下 $h\omega_1\wedge\omega_2$；因而两个已知外微分的系数直接给出 f,h。最后求出 $\mathrm{d}\omega_{12}$，把它与 $-K\omega_1\wedge\omega_2$ 比较，就读出 K。整个过程不使用第二基本形式。

正交坐标下配方无需混合项，以上算法可以压缩为常用的曲率公式。

命题 4.3.2 (正交坐标下的 Gauss 曲率). 若 $\mathrm{I}=E\mathrm{d}u^2+G\mathrm{d}v^2$，则

$$\begin{aligned}\omega_{12}&=-\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}\mathrm{d}u+\frac{G_u}{2\sqrt{EG}}\mathrm{d}v,\\ K&=-\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left[\partial_u\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)+\partial_v\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)\right].\end{aligned}$$

特别地，$\mathrm{I}=\lambda^2(\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2)$ 时，$K=-\lambda^{-2}\Delta\log\lambda$。

证明. 取 $\omega_1=\sqrt{E}\mathrm{d}u,\omega_2=\sqrt{G}\mathrm{d}v$。求外微分并与 $\omega_{12}\wedge\omega_2,-\omega_{12}\wedge\omega_1$ 比较，得第一式；再求外微分并与 $-K\sqrt{EG}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v$ 比较得第二式。令 $E=G=\lambda^2$ 即得末式。□

如果还给定第二基本形式，同一组余标架也可用于检查它与度量是否相容。令 $A=\sqrt{E}, B=\sqrt{G}$，则

$$\omega_{13}=\frac{L}{A}\mathrm{d}u+\frac{M}{A}\mathrm{d}v,\qquad \omega_{23}=\frac{M}{B}\mathrm{d}u+\frac{N}{B}\mathrm{d}v,$$

从两条 Codazzi 方程得到

$$\left(\frac{M}{A}\right)_u-\left(\frac{L}{A}\right)_v=-\frac{NA_v}{B^2}-\frac{MB_u}{AB},$$
$$\left(\frac{N}{B}\right)_u-\left(\frac{M}{B}\right)_v=\frac{MA_v}{AB}+\frac{LB_u}{A^2}.$$

Gauss 方程则是上述 K 公式等于 $(LN-M^2)/(EG)$。这些式子是同一组结构方程的不同坐标表达，不是额外假设。

例 4.3.3 (球面的三种计算). 半径 a 的球面取外法向 $n=P/a$。第一种方法：$\mathrm{II}=-\mathrm{I}/a$，故主曲率均为 $-1/a$，$K=1/a^2$。第二种方法：$\omega_{13}=-\omega_1/a, \omega_{23}=-\omega_2/a$，由 $\mathrm{d}\omega_{12}=-\omega_1\wedge\omega_2/a^2$ 读出 K。
第三种方法只使用度量。以纬度 u 和经度 v 表示，$\mathrm{I}=a^2\mathrm{d}u^2+a^2\cos^2 u\mathrm{d}v^2$，取 $\omega_1=a\mathrm{d}u, \omega_2=a\cos u\mathrm{d}v$，则 $\omega_{12}=-\sin u\mathrm{d}v$，再次得到 $K=1/a^2$。

球面的前两种算法使用了法向量，第三种只使用度量，却得到相同的 K。同样，从圆柱的 $\mathrm{I}=\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2$ 出发，取 $\omega_1=\mathrm{d}u, \omega_2=\mathrm{d}v$，立刻有 $\omega_{12}=0$，进而 $K=0$；这次完全无需求出圆柱的第二基本形式。

既然计算可以从度量开始，我们还可以先写下一族正定二次型，再判断它们的曲率。

例 4.3.4 (一族常曲率度量). 令 $q=1+\frac{k}{4}(u^2+v^2)$，在 $q>0$ 的区域取 $\mathrm{I}=q^{-2}(\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2)$。因为

$$\Delta\log q=\frac{k}{q}-\frac{k^2(u^2+v^2)}{4q^2}=\frac{k}{q^2},$$

有 $K=q^2\Delta\log q=k$。这也说明在抽象度量层面，常正、零、负曲率可用相同形式的表达式统一处理。

4.4 曲面论基本定理

在曲线论基本定理中，给定曲率和挠率后，我们先解 Frenet 方程求出 T,N,B，再对 T 积分求出曲线的参数方程。现在我们想问：给定第一、第二基本形式，能否求出具有这两个基本形式的曲面？我们也尝试先求出标架 e_1,e_2,e_3，再求出曲面的参数方程 $P(u,v)$。不过，这次标架要同时满足关于 u,v 的两个微分方程。第 3.7 节已经证明 Gauss 与 Codazzi 方程是必要条件，现在来确认它们是否足够。

先看为什么要增加兼容条件。若要求 $Y_u=AY, Y_v=BY$ 同时成立，则同一个混合偏导必须有两种相同的计算结果：

$$(Y_u)_v=(A_v+AB)Y,$$
$$(Y_v)_u=(B_u+BA)Y.$$

当 Y 可逆时，两式相等迫使 $B_u - A_v = AB - BA$。单独解每条方向上的常微分方程，并不能自动保证这一条件。

现在假设它成立，尝试具体构造解。我们先沿一条水平线解第一个方程，再从线上各点沿竖直线解第二个方程。这样构造很具体，困难也很明确：离开初始水平线后，第一个方程是否还成立？下面的引理说明，兼容条件恰好保证它一直成立。

引理 4.4.1 (矩阵方程的局部可积性)**.** 设矩形邻域上 $A(u,v), B(u,v)$ 为 C^1 矩阵，满足

$$B_u - A_v = AB - BA.$$

则给定 $Y(u_0,v_0) = Y_0$，方程 $Y_u = AY, Y_v = BY$ 在该邻域有唯一解。若 Y_0 可逆，则 Y 可逆。

证明. 先沿 $v = v_0$ 解 $Y_u = AY$，再对每个 u 沿竖直线解 $Y_v = BY$。所得 Y 已满足第二个方程。为检查第一个方程，把两边的差记为 $F = Y_u - AY$；我们的目标就是证明 $F = 0$。对 v 求导并代入 $Y_v = BY$，使用兼容条件得到

$$F_v = BF + (B_u - A_v + BA - AB)Y = BF.$$

兼容条件消去了额外项，使 F 自己满足一个齐次线性方程。初始线上 $F = 0$，由常微分方程唯一性知 $F \equiv 0$，所以第一个方程也成立。任一解都必须沿这两段路径等于上述构造，故唯一。各段线性常微分方程的基本解矩阵可逆，因而可逆性保持。 □

把标架的三个向量 e_1, e_2, e_3 按行排成矩阵 Y，便可用这个引理求出它们。接下来要求曲面的参数方程 P 满足 $\mathrm{d}P = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2$。结构方程保证右端是闭的一次形式，所以可以在一个小邻域内逐个坐标积分，求出 $P(u,v)$。

定理 4.4.2 (由基本方程求出曲面的参数方程)**.** 设平面区域上给定 C^2 一次形式 ω_1, ω_2, 满足 $\omega_1 \wedge \omega_2 \neq 0$, 以及 C^1 反对称矩阵值一次形式 $\Omega = (\omega_{ij})$。若 $\omega = (\omega_1, \omega_2, 0)$ 与 Ω 满足式 (4.2.2)，则在每点附近，给定初始位置及右手单位正交标架后，存在唯一的曲面及适配幺正标架满足式 (4.2.1)。

证明. 写 $\Omega = A\mathrm{d}u + B\mathrm{d}v$，其结构方程等价于上一引理的兼容条件，故可解出 Y。沿任一坐标线，A, B 反对称使 Y^TY 的导数为零，故 Y 保持正交；行列式连续，初值为 1，所以始终为 1。

令 $\eta = \omega Y$。由乘积规则，$\mathrm{d}\eta = (\mathrm{d}\omega - \omega \wedge \Omega)Y = 0$。在小矩形中逐分量使用例 4.1.8 的积分公式，得到唯一满足初值的 P，使 $\mathrm{d}P = \eta$。ω_1, ω_2 独立且 e_1, e_2 独立，故 P 秩为 2。缩小邻域后它是到像集的同胚，于是确为曲面片；e_3 为相应单位法向。唯一性来自 Y 的唯一性与位置积分的唯一性。 □

上一定理要求给定一次形式 ω_1, ω_2 和 ω_{ij}，而我们现在只知道第一、第二基本形式，因此要先从这两个基本形式求出所需的一次形式。具体来说，对第一基本形式配方，求出 ω_1, ω_2，再由前两条结构方程求出 ω_{12}；将第二基本形式用 ω_1, ω_2 表示，就能求出 ω_{13}, ω_{23}。只要它们满足其余结构方程，便能应用上一定理求出曲面的参数方程。

定理 4.4.3 (曲面论基本定理). 设区域上给定光滑对称二次型

$$\mathrm{I} = E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2 > 0, \qquad \mathrm{II} = L\mathrm{d}u^2 + 2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N\mathrm{d}v^2.$$

若它们满足 Gauss 方程与 Codazzi 方程，则每点附近存在以它们为第一、第二基本形式的定向曲面片。它在保持所选定向的刚性运动意义下局部唯一。

证明. 由 I 取正向正交余标架 ω_1, ω_2，由无挠的前两条结构方程唯一求得 ω_{12}。把 II 写成 $a\omega_1^2 + 2b\omega_1\omega_2 + c\omega_2^2$，令 $\omega_{13} = a\omega_1 + b\omega_2, \omega_{23} = b\omega_1 + c\omega_2$。对称性保证第三条结构方程，其余三条正是给定的 Gauss、Codazzi 条件。因此应用定理 4.4.2 得到曲面，且由引理 4.3.1 知其基本形式符合要求。

若两个曲面给出同样数据，先用唯一的固有运动对齐一点处的位置和右手标架，再由基本方程的唯一性知它们在邻域内重合。 □

以上只证明了：在参数域中每一点附近，都能找到一个具有给定基本形式的曲面片。若想沿路径把构造延拓到更大的区域，还要分别检查绕行后能否回到同一组位置与标架，以及不同参数点会不会重合。单连通域上的兼容条件可以解决前一种路径依赖，却不保证参数化全局单射；例 4.4.4 中的周期现象就会显示后一种区别。前面我们已经从圆柱的参数方程算出了两个基本形式。下面只给出这两个基本形式，试着一步步求出相应曲面的参数方程，看是否得到原来的圆柱。我们会看到：只给第一基本形式仍无法区分平面与圆柱，第二基本形式补上的正是法向量如何变化的信息。

例 4.4.4 (由基本形式求出圆柱的参数方程). 给定 $\mathrm{I} = \mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2, \mathrm{II} = -\mathrm{d}u^2$，取 $\omega_1 = \mathrm{d}u, \omega_2 = \mathrm{d}v$，得到 $\omega_{12} = 0, \omega_{13} = -\mathrm{d}u, \omega_{23} = 0$。一组标架解为

$$Y = \begin{pmatrix} \cos u & 0 & -\sin u \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin u & 0 & \cos u \end{pmatrix}.$$

于是 $\mathrm{d}P = (\cos u\mathrm{d}u, \mathrm{d}v, -\sin u\mathrm{d}u)$，积分得 $P = (\sin u, v, \cos u)$。直接计算 $P_u \times P_v = (\sin u, 0, \cos u) = n$，验证第二基本形式确为 $-\mathrm{d}u^2$。

例 4.4.5 (由基本形式求出旋转抛物面的参数方程). 给定 $u > 0$ 上

$$\mathrm{I} = (1+u^2)\mathrm{d}u^2 + u^2\mathrm{d}v^2, \qquad \mathrm{II} = \frac{\mathrm{d}u^2 + u^2\mathrm{d}v^2}{\sqrt{1+u^2}}.$$

可取 $\omega_1 = \sqrt{1+u^2}\mathrm{d}u, \omega_2 = u\mathrm{d}v$，因而

$$\omega_{12} = \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{1+u^2}},$$
$$\omega_{13} = \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2},$$
$$\omega_{23} = \frac{u\mathrm{d}v}{\sqrt{1+u^2}}.$$

令 $\varphi = \arctan u$，使 $\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}u/(1+u^2)$，便能把沿 u 的系数解释为转角的微分。相应的标架可分解为

$$Y = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos v & \sin v & 0 \\ -\sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

第一因子处理 u 方向的转动，第二因子处理绕轴转动。代入得到 $\mathrm{d}P = (\cos v\mathrm{d}u - u\sin v\mathrm{d}v, \sin v\mathrm{d}u + u\cos v\mathrm{d}v, u\mathrm{d}u)$，故 $P = (u\cos v, u\sin v, u^2/2)$，即旋转抛物面。两个转动一般不交换，因此这里的乘积次序也是解的一部分；将矩阵代回基本方程就能检验它。

第五章　曲面上的曲线

5.1　测地曲率与测地挠率

第 3.5 节用曲率向量的法向投影提取了由曲面决定的弯曲。剩下的切向投影记录什么？在平面上，法向投影恒为零，但圆仍在不断转弯；这一部分应当反映曲线在曲面内部的弯曲。

为了同时记录两部分，我们保留曲线的单位切向量 T，将曲面法向量 n 也放进标架。第三个方向于是取为 $Q = n \times T$。

定义 5.1.1 (Darboux 标架及三种曲率). 对定向曲面上的单位速度曲线 $c(s)$,令 $T = c'$, $Q = n \times T$。右手标架 $\{T, Q, n\}$ 称为 Darboux 标架。定义

$$\begin{aligned} \kappa_g &= T' \cdot Q, \\ \kappa_n &= T' \cdot n, \\ \tau_g &= Q' \cdot n = -n' \cdot Q, \end{aligned}$$

分别称为测地曲率、法曲率和测地挠率。

单位正交关系使导数矩阵反对称，故有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{pmatrix} T \\ Q \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_g & \kappa_n \\ -\kappa_g & 0 & \tau_g \\ -\kappa_n & -\tau_g & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T \\ Q \\ n \end{pmatrix}. \tag{5.1.1}$$

将矩阵的三行写出，可以分别看清三个系数控制的变化：

$$\begin{aligned} T' &= \kappa_g Q + \kappa_n n, \\ Q' &= -\kappa_g T + \tau_g n, \\ n' &= -\kappa_n T - \tau_g Q. \end{aligned}$$

第一行把曲线自身的弯曲分成切向与法向两部分；第三行则描述沿曲线移动时曲面法向怎样改变。其中 τ_g 控制的是法向变化中垂直于运动方向的切向分量。它和空间曲线的挠率观察的对象不同，不能仅凭名称相似就认定相等。

由此 $\kappa^2 = \kappa_g^2 + \kappa_n^2$：曲率向量的两个正交分量分别是 $\kappa_g Q$ 与 $\kappa_n n$。其中 κ_g 是切向分量在 Q 方向上的带符号系数，记录曲线在曲面内向哪一侧转弯。

将 Darboux 标架与已有的 Frenet 标架比较，可看出测地挠率与空间挠率相差哪一项。

引理 5.1.2 (两种标架的关系). 若 $\kappa > 0$，选连续角 α 使

$$N = \sin\alpha\, Q + \cos\alpha\, n, \qquad B = -\cos\alpha\, Q + \sin\alpha\, n,$$

则 $\kappa_g = \kappa\sin\alpha$、$\kappa_n = \kappa\cos\alpha$，且 $\tau_g = \tau + \alpha'$。

证明. 将 $T' = \kappa N$ 分解到 Q, n 上得前两式。对 N 求导，使用式 (5.1.1) 并与 B 作内积，得到 $N' \cdot B = \tau_g - \alpha'$；左侧为 τ。 □

改变曲线方向时，κ_g 变号，κ_n, τ_g 不变；改变曲面法向时，κ_g, κ_n 变号，τ_g 不变。这些结论由 T, Q, n 的变化及链式法则逐项得到。

法曲率已是方向函数，测地挠率也可脱离具体曲线。用第二基本形式表示它，便能同时比较两者。

定理 5.1.3 (法曲率与测地挠率的方向公式). 对非零切向量 X，有

$$\kappa_n(X) = \frac{\mathrm{II}(X,X)}{\mathrm{I}(X,X)}, \qquad \tau_g(X) = \frac{\mathrm{II}(n \times X, X)}{\mathrm{I}(X,X)}.$$

若 $T = \cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2$ 是单位向量，e_i 为右手单位主标架，则

$$\kappa_n(T) = \kappa_1 \cos^2\theta + \kappa_2 \sin^2\theta, \qquad \tau_g(T) = \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{2} \sin 2\theta.$$

因此相切曲线的这两个量相同，而测地曲率未必相同。

证明. $-n' = WT$，所以 $\tau_g = \langle WT, Q\rangle = \mathrm{II}(T, Q)$，齐次化即得方向公式。再用 $n \times T = -\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2$ 代入即可。κ_g 还依赖曲线的二阶切向变化，不能仅由切方向决定。 □

由公式还可读出 $|\tau_g| \le |\kappa_2 - \kappa_1|/2$。若 $X = xP_u + yP_v$，令 $D = EG - F^2$，取 $n = (P_u \times P_v)/\sqrt{D}$，则

$$n \times X = \frac{-(Fx + Gy)P_u + (Ex + Fy)P_v}{\sqrt{D}},$$

从而

$$\tau_g(X) = \frac{(EM - FL)x^2 + (EN - GL)xy + (FN - GM)y^2}{\sqrt{D}\,(Ex^2 + 2Fxy + Gy^2)}.$$

这给出自然坐标中可直接使用的表达式。

要计算测地曲率，还需分清两种转动。把曲线切向写成 $T = \cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2$ 后，θ 记录的是它相对于所选曲面标架的角度。如果标架自身也在转动，只计算 θ' 就会漏掉这一部分。平面极坐标中的径向标架便是如此：即使某个向量在空间中保持不变，它相对于径向标架的角度仍会改变。下面的公式将相对角度的变化与标架的转动相加，得到曲线实际的测地曲率。

定理 5.1.4 (转角公式与 Liouville 公式). 设 $T = \cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2$，其中 e_1, e_2 是局部正向单位正交标架，其联络形式为 ω_{12}，则

$$\kappa_g = \theta' + \omega_{12}(T).$$

在正交参数 $\mathrm{I} = E\mathrm{d}u^2 + G\mathrm{d}v^2$ 中，取 $e_1 = P_u/\sqrt{E}, e_2 = P_v/\sqrt{G}$，有

$$\begin{aligned}\kappa_g &= \theta' - \frac{\cos\theta}{2\sqrt{G}}\partial_v \log E + \frac{\sin\theta}{2\sqrt{E}}\partial_u \log G,\\ u' &= \frac{\cos\theta}{\sqrt{E}},\\ v' &= \frac{\sin\theta}{\sqrt{G}}.\end{aligned}$$

证明. 对 T 求导并与 $Q = -\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2$ 作内积，角度导数贡献 θ'，标架导数贡献 $\omega_{12}(T)$。再代入命题 4.3.2 中的 ω_{12}，以及从 $T = u'P_u + v'P_v$ 比较得到的 u', v'，即得 Liouville 公式。 □

若沿曲线直接选 $e_1 = T, e_2 = Q$，则 $\theta = 0$，三种曲率分别为 $\omega_{12}(T), \omega_{13}(T), \omega_{23}(T)$。若换成任意曲面标架，曲线切向相对标架也可能转动，这部分仍由 θ' 补上。

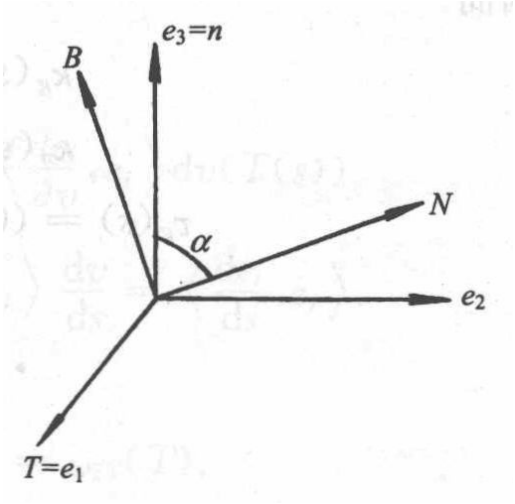


图 5.1: Darboux 标架与 Frenet 标架的关系；图中 $e_1 = T$、$e_2 = Q$、$e_3 = n$。

5.2 曲面上的特殊曲线

Darboux 公式的三个系数分别控制不同的转动。令其中某一个消失，就得到三类几何意义不同的曲线。

定义 5.2.1 (渐近线、曲率线与测地线). 曲面上的正则曲线称为渐近线，是指 $\kappa_n = 0$；称为曲率线，是指切线处处为主方向；称为测地线，是指 $\kappa_g = 0$。这些条件按弧长参数理解，与保持或改变方向的正则重参数化无关。

这三个名称要结合前面的分解来理解。测地线要求 T' 没有切平面内的分量，所以曲线虽可能在空间中弯曲，却没有在曲面内向左右转弯。渐近线则要求 T' 没有曲面法向分量，即在当前切方向上没有二阶法向弯曲。曲率线的条件稍有不同：切方向是形算子的特征方向，意味着沿它移动时法向变化 $-n' = WT$ 恰好与 T 平行，没有 Q 分量，也就是 $\tau_g = 0$。

因此，每一类条件都可以用不同标架向量的导数来辨认。下面集中列出等价表达，使用时只需选择最方便计算的一项。

命题 5.2.2 (三类曲线的等价刻画)**.** 记 $Q = n \times T$，则下列每行内的条件等价（零向量也算平行）：

1. 测地线：$\kappa_g = 0$；$T' \cdot Q = 0$；$Q' \cdot T = 0$；$T' = \kappa_n n$；$T' \parallel n$；$Q' = \tau_g n$；$Q' \parallel n$。
2. 渐近线：$\kappa_n = 0$；$T' \cdot n = 0$；$n' \cdot T = 0$；$T' = \kappa_g Q$；$T' \parallel Q$；$n' = -\tau_g Q$；$n' \parallel Q$。
3. 曲率线：$\tau_g = 0$；$Q' \cdot n = 0$；$n' \cdot Q = 0$；$Q' = -\kappa_g T$；$Q' \parallel T$；$n' = -\kappa_n T$；$n' \parallel T$。

证明. 前两行由式 (5.1.1) 直接比较单位正交标架的系数。第三行还需确认主方向条件：$WT = -n' = \kappa_n T + \tau_g Q$，所以 T 是特征向量当且仅当 $\tau_g = 0$，其余条件仍由 Darboux 公式得到。 □

第三行可进一步写成一条向量微分方程，用于直接识别曲率线。

定理 5.2.3 (Rodrigues 定理)**.** 曲线 $c(s)$ 为曲率线，当且仅当存在函数 $\lambda(s)$ 使 $n' = -\lambda c'$。其中 λ 就是该切方向的主曲率。

证明. $-n' = Wc'$，因此等式正是 c' 为 W 的特征向量的条件。 □

圆柱又提供了一个直接的对照：圆周与母线都是曲率线，因为它们沿两个主方向；其中母线的法曲率为零，还是渐近线。球面的形算子则是 $-\mathrm{id}/a$，所以每个方向都是主方向，每条正则曲线都是曲率线，但只有某些曲线是测地线。这说明三种条件分别控制不同的几何性质。

在非脐点区域，若参数线是两族曲率线，则主方向正交，故 $F = 0$；又 $\mathrm{II}(P_u, P_v) = \langle WP_u, P_v \rangle = 0$，所以 $M = 0$。反过来，$F = M = 0$ 时 $g^{-1}b$ 对角，参数线都是曲率线。渐近线的坐标方程为 $L\mathrm{d}u^2 + 2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N\mathrm{d}v^2 = 0$，曲率线的坐标方程见式 (3.5.1) 后的推导。

在渐近方向上，两个主曲率的影响恰好抵消，但测地挠率保留了它们的乘积信息。这给出空间挠率与 Gauss 曲率之间的联系。

定理 5.2.4 (Enneper 定理)**.** 在双曲点处，两条不同渐近方向的测地挠率分别为 $\sqrt{-K}$ 和 $-\sqrt{-K}$。若相应渐近线在该点附近曲率非零，则其空间挠率也分别取这些值。

证明. 令 $\kappa_1 \cos^2\theta + \kappa_2 \sin^2\theta = 0$，由 Euler 公式计算得

$$\tau_g^2 = (\kappa_2 - \kappa_1)^2 \sin^2\theta \cos^2\theta = -\kappa_1\kappa_2 = -K.$$

两个不同的无向渐近方向使 $\sin 2\theta$ 符号相反。若渐近线 $\kappa > 0$，则 $\cos\alpha = 0$，连续性使 α 局部恒定，所以 $\tau_g = \tau$。同理，对曲率非零的测地线，$\sin\alpha = 0$，也有 $\tau_g = \tau$，并且 $\kappa = |\kappa_n|$。 □

这里 $K < 0$ 保证存在两个不同的渐近方向，而它们分别对应 $\sin 2\theta$ 的两种符号。两条经过同一点的渐近线若相切，就仍属于同一个方向，不能据此得到一正一负两个挠率值。

例 5.2.5 (曲面上受约束的运动与绷紧的绳). 理想无摩擦约束下的自由质点只受法向力，加速度切向分量为零，速度大小恒定，因而轨迹在非零速度处为测地线。理想柔绳贴在光滑曲面上，若只有法向约束力且张力非零，平衡方程的切向分量也要求曲率向量无 Q 分量，故绳的局部平衡位置是测地线。这里必须排除摩擦或额外切向外力。

5.3 Gauss–Bonnet 公式

平面上，正向简单闭曲线的一周总转角为 2π。我们想知道，曲面上是否也能把边界的转动加起来得到一个整体结论。Liouville 公式 $\kappa_g = \theta' + \omega_{12}(T)$ 提示了做法：先分别积分方向角和标架的转动，再用结构方程把后一项转成内部的 Gauss 曲率积分。边界若有角点，还需把方向角的跳跃计入。

定义 5.3.1 (外角与正向边界). 设分段光滑曲线在角点的前后单位切向量为 T_-, T_+，二者不互为反向。外角 $\alpha \in (-\pi, \pi)$ 由

$$T_+ = \cos\alpha\, T_- + \sin\alpha\, (n \times T_-)$$

确定。区域边界的正向规定为：头顶沿 n 行走时，区域在左侧。内角 $\beta \in (0, 2\pi)$ 与外角满足 $\alpha = \pi - \beta$。

以下按系数积分：$\int_D f\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v$ 表示定向坐标域上的通常二重积分 $\int_D f\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，Green 公式相应写为 $\int_{\partial D} \eta = \int_D \mathrm{d}\eta$。[1]

为什么曲面上的 $\int \kappa_g \mathrm{d}s$ 不能单独等于 2π？方向角 θ 是相对于活动标架测量的，绕行时标架自身也会转动。由 Liouville 公式，曲线在曲面内的转弯量需要加上这部分标架变化；而标架绕边界的总变化又由区域内部的曲率控制。

因此计算时要保留三个部分：每条光滑边上连续累积的转角、角点处一次跳过的外角，以及活动标架带来的修正。在一个曲面坐标片中，前两部分可以直接沿边界相加，后一部分则由 Green 公式移入内部。

定理 5.3.2 (局部 Gauss–Bonnet 公式). 设 D 是定向曲面上一个紧致、与闭圆盘同胚的曲边多边形，边界分段 C^2、各边正则，角点无尖点退化。则

$$\iint_D K\,\mathrm{d}A + \int_{\partial D} \kappa_g\,\mathrm{d}s + \sum_j \alpha_j = 2\pi.$$

公式把三个量放在一起：区域内部的 Gauss 曲率、光滑边界上的测地曲率以及角点处的转角。在平面上第一项为零，便回到总转角公式；如果边界各边都是测地线，第二项为零，内部曲率就由角点的角度反映出来。

证明. 先设 D 落在一个坐标片内，取正向单位正交标架。每条边上选连续方向角 θ。由定理 5.1.4 与结构方程，

$$\int_{\partial D} \kappa_g \mathrm{d}s = \sum_{\text{各边}} \Delta\theta + \int_{\partial D} \omega_{12} = \sum_{\text{各边}} \Delta\theta - \iint_D K\mathrm{d}A.$$

[1] 这一积分约定与前面的归一化外积配套使用；外积作为交替映射时的 $1/2$ 不再额外乘入积分。

切线方向在整个边界上的连续变化加上各角点的跳跃为 2π。理由是：将角点在小邻域内光滑倒圆，新增小弧的总转角趋于外角；正向简单平面闭曲线的旋转指标为 1。曲面坐标的微分及正交化给出定义在整个圆盘上的正定向基变换，其边界上的额外转动数为零，故不改变此整数。于是 $\sum \Delta\theta + \sum \alpha_j = 2\pi$，得到公式。

一般圆盘可作足够细的曲边三角剖分，使每个小三角形落在坐标片内。对各片相加，内部边的测地曲率积分方向相反而抵消，内部顶点的角度凑成 2π，边界顶点留下原来的外角；用圆盘的 $V - E + F = 1$ 即得同一结果。下面将这一计数写成一般形式。 □

局部公式相加后，内部边界全部消失，剩下的组合量只取决于顶点、边和面的个数。这解释了公式中为何出现拓扑量。

定理 5.3.3 (整体 Gauss–Bonnet 公式). 设 S 为紧致可定向曲面，边界分段光滑，$\chi(S) = V - E + F$ 为 Euler 示性数。则

$$\iint_S K \mathrm{d}A + \int_{\partial S} \kappa_g \mathrm{d}s + \sum_j \alpha_j = 2\pi\chi(S).$$

闭曲面特别满足 $\int_S K\mathrm{d}A = 2\pi\chi(S)$。

证明. 取有限的足够细的曲边三角剖分（这里使用紧致光滑曲面的三角剖分定理）。设内部、边界顶点数为 V_i, V_b，边数为 E_i, E_b，面数为 F。小三角形的内角总和为 $2\pi V_i + \pi V_b - \sum \alpha_j$。对每个三角形的局部公式相加后，得到

$$\iint_S K \mathrm{d}A + \int_{\partial S} \kappa_g \mathrm{d}s + \sum \alpha_j = 2\pi V_i + \pi V_b - \pi F.$$

又 $3F = 2E_i + E_b$、$E_b = V_b$，因此右侧等于 $2\pi(V - E + F)$。闭曲面取 $V_b = E_b = 0$，同样成立。 □

例 5.3.4 (平面转角、球面三角形与环面). 平面上 $K = 0$，测地曲率就是相对曲率，故正向简单分段光滑闭曲线满足 $\int \kappa_r \mathrm{d}s + \sum \alpha_j = 2\pi$；反向遍历时两项同时变号。
半径 a 的球面上，测地三角形内角为 A, B, C，因为边的 $\kappa_g = 0$，有 $\mathrm{Area} = a^2(A + B + C - \pi)$。由三条互相垂直的大圆围成的八分之一球面，三个角均为 $\pi/2$，面积为 $\pi a^2/2$。
整个球面 $\chi = 2$，故总曲率 4π；环面 $\chi = 0$，故总曲率为零。这不表示环面处处平坦，而是正负曲率积分抵消。

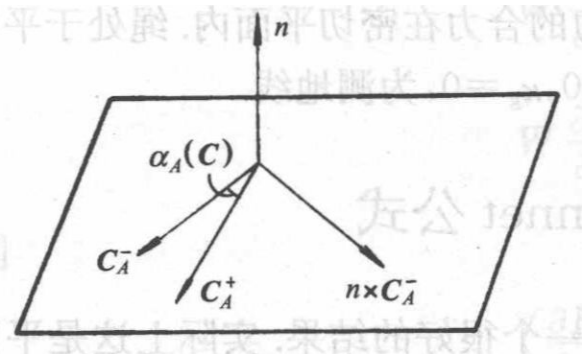


图 5.2: 在切平面中由进入方向 C_A^- 转向离开方向 C_A^+，得到边界角点处的有向外角。

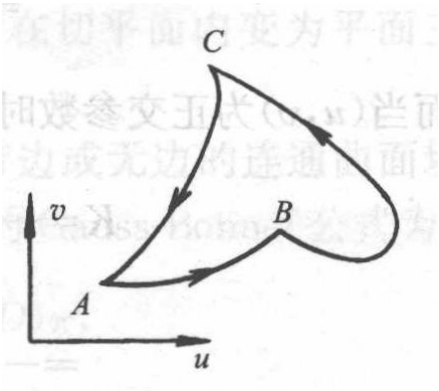


图 5.3: 曲边三角形及其边界的正向：沿边界前进时，区域位于左侧。

5.4 联络

在平面内比较向量很容易：把它们平移到同一点即可，相同分量就表示相同方向。曲面上的问题在于，不同点的切向量属于不同切平面。一个在空间中保持不变的向量，移动到另一个点后可能已经不再与曲面相切；反过来，一个始终与曲面相切的向量，即使没有在曲面内转动，也可能因切平面本身改变而具有非零的空间导数。

例如单位球面赤道的单位切向量

$$c(s) = (\cos s, \sin s, 0), \qquad T(s) = (-\sin s, \cos s, 0)$$

满足 $T' = -c(s)$。这个导数完全沿球面法向：切向量确实在空间中改变，但没有切平面内的变化。我们希望曲面内部的求导能够识别这一区别。

因而，一个自然的办法是先照常在空间中求导，再去掉法向分量，只保留切向投影。这个投影后的导数称为协变导数；联络就是把每个点、每个求导方向上的这种求导规则统一起来。

定义 5.4.1 (协变导数与 Levi-Civita 联络). 设 X, Y 为曲面切向量场，$D_X Y$ 为环境空间中逐分量的方向导数，定义

$$\nabla_X Y = (D_X Y)^\top.$$

称其为 Y 沿 X 的协变导数，∇ 称为曲面的 Levi-Civita 联络。上标 $\top$ 表示正交投影到切空间。

这个候选必须遵循微分的乘积法则，同时在求导方向上只依赖该点的向量。以下性质明确了两类输入的不同作用。

定理 5.4.2 (协变导数的运算规则)**.** 对光滑函数 f, g，有

$$\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z,$$
$$\nabla_X(fY+gZ) = f\nabla_X Y + g\nabla_X Z + (Xf)Y + (Xg)Z.$$

在自然坐标中，$\nabla_{P_i} P_j = \Gamma_{ij}^k P_k$。若 $X = X^i P_i, Y = Y^j P_j$，则

$$\nabla_X Y = X^i(\partial_i Y^k + \Gamma_{ij}^k Y^j) P_k.$$

证明. 环境方向导数满足相应的线性与乘积法则，投影后得到前两式。Gauss 公式取切向部分给出 $\nabla_{P_i} P_j$；再将 X, Y 展开并应用前两式，即得坐标公式。 □

坐标公式中的两项各有来由：$\partial_i Y^k$ 来自向量分量的变化，$\Gamma_{ij}^k Y^j$ 来自坐标基自身的变化。只对分量求导，会把后一项漏掉。

例如平面极坐标的单位向量 $e_r = (\cos\theta, \sin\theta)$、$e_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta)$ 满足

$$\nabla_{e_\theta} e_r = \frac{1}{r} e_\theta, \qquad \nabla_{e_\theta} e_\theta = -\frac{1}{r} e_r.$$

这是因为沿单位圆周方向求导为 $r^{-1}\partial_\theta$。虽然 e_r 在这组活动基下的分量恒为 $(1, 0)$，向量本身仍在转动。平面曲率为零，所以联络系数非零本身并不能说明曲面有曲率；它也记录所选基的变化。

坐标公式只含 g 决定的 Christoffel 符号，已提示这种导数是内蕴的。为了给出不依赖坐标的刻画，先记录向量场作为导子的交换子。

定义 5.4.3 (Lie 括号)**.** 向量场 X, Y 的 Lie 括号定义为作用于函数的导子 $[X, Y] = XY - YX$。坐标中

$$[X, Y] = (X^i \partial_i Y^k - Y^i \partial_i X^k) P_k.$$

例如在平面坐标中取 $X = \partial_u, Y = u\partial_v$，对函数 f 有

$$X(Yf) = f_v + u f_{uv}, \qquad Y(Xf) = u f_{vu},$$

所以 $[X, Y] = \partial_v$。这个非零结果来自 Y 的系数 u 沿 X 改变，即使平面没有曲率也会出现。因此，后面研究两次协变导数之差时，需要先扣除向量场自身这种不交换的影响。一般计算中二阶导数同样抵消，所以交换子仍为一阶导子。下面两个性质分别表达内积的求导法则和“坐标方向之间没有额外扭转”。

定理 5.4.4 (度量相容与无挠性)**.** 联络满足

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \qquad \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

反过来，这两个性质唯一确定一个满足联络运算规则的 ∇。

证明. 第一式来自环境内积的乘积法则，因为法向分量与 Y, Z 均正交。第二式由坐标公式及 $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ 得到。

要证明唯一性，只需从这两个性质求出 $\nabla_X Y$ 与任意 Z 的内积。分别对 $\langle Y,Z\rangle, \langle Z,X\rangle, \langle X,Y\rangle$ 求导，将前两式相加再减去第三式，并以无挠性交换求导方向，未知项便可合并成 $2\langle \nabla_X Y, Z\rangle$。这得到 Koszul 公式

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle = {} & X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle \\ & - \langle X,[Y,Z]\rangle + \langle Y,[Z,X]\rangle + \langle Z,[X,Y]\rangle. \end{aligned}$$

右侧全由度量和向量场决定；对所有 Z 的内积决定 $\nabla_X Y$，所以唯一。存在性已由切向投影的构造给出。 □

沿两个方向先后求协变导数，交换次序后可能得到不同结果。不过一般向量场作为导子本身就不一定交换，这一差异已经由 $[X,Y]$ 记录。我们先扣除这部分，再考察联络额外造成的差异。

定义 5.4.5 (曲率张量). 定义

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \qquad R(X,Y,Z,W) = \langle R(X,Y)Z, W\rangle.$$

这个表达式看似含向量场的导数，但所有非张量项都会抵消；因此它真正只依赖一点处的向量值。

引理 5.4.6 (曲率张量的线性与对称性). $R(X,Y)Z$ 对 X,Y,Z 均为 $C^\infty(S)$ 线性，且

$$R(X,Y) = -R(Y,X), \qquad \langle R(X,Y)Z, W\rangle = -\langle Z, R(X,Y)W\rangle.$$

因而四元形式在各输入上线性，并在前两项、后两项换位时变号。

证明. 第一条反对称性由定义直接得到。将 X 换成 fX，用 $[fX,Y] = f[X,Y] - (Yf)X$，所有含 Yf 的项抵消；第三个输入换成 fZ 时，含一阶导数的项两两抵消，二阶部分为 $(XYf - YXf - [X,Y]f)Z = 0$。因此三者均为函数线性。最后，对 $\langle Z,W\rangle$ 连续应用度量相容性，计算 $(XY - YX - [X,Y])\langle Z,W\rangle = 0$，混合内积项抵消，余下恰为所需等式。 □

这一张量与之前的 Gauss 曲率必须相容。把环境空间的零曲率分解为切向与法向部分，可以直接算出二者的关系。

定理 5.4.7 (Gauss 方程的张量形式). 曲面上有

$$R(X,Y)Z = \mathrm{II}(Y,Z)WX - \mathrm{II}(X,Z)WY.$$

对线性无关的 X,Y，因此

$$K = \frac{\langle R(X,Y)Y, X\rangle}{\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2} = -\frac{R(X,Y,X,Y)}{\langle X,X\rangle\langle Y,Y\rangle - \langle X,Y\rangle^2}.$$

证明. 将 $D_X Y = \nabla_X Y + \mathrm{II}(X,Y)n$、$D_X n = -WX$ 代入环境恒等式 $D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]}Z = 0$，取切向部分得到第一式。在单位主方向上，它给出 $\langle R(e_1,e_2)e_2, e_1\rangle = \kappa_1\kappa_2$。一般 X,Y 由这组基作线性变换，分子因前后两对交替性乘以变换行列式的平方，分母的 Gram 行列式乘以同一因子，故比值不变。 □

若要与坐标计算对照，直接展开定义得

$$R(P_i,P_j)P_k=(\partial_i\Gamma^{\ell}_{jk}-\partial_j\Gamma^{\ell}_{ik}+\Gamma^{a}_{jk}\Gamma^{\ell}_{ia}-\Gamma^{a}_{ik}\Gamma^{\ell}_{ja})P_\ell.$$

注意曲率张量的指标排列会影响符号；上面的 K 公式已经固定本笔记的约定。

最后，Darboux 公式的切向部分为 $\nabla_T T=\kappa_g Q$。因此测地线正是满足 $\nabla_T T=0$ 的单位速度曲线，而 $\kappa_g=\langle\nabla_T T,n\times T\rangle$。由联络的内蕴性可知，保长对应保持测地线。

5.5 测地线

直线既是“方向不变”的曲线，又在两点之间给出最短路。曲面上这两个性质只在局部相联系：协变加速度为零给出测地线方程，而最短性质需要额外的邻域限制。

“方向不变”在这里指 $\nabla_{c'}c'=0$。若用坐标表达速度 $c'=(x^j)'P_j$，求导时一方面要对速度分量 $(x^j)'$ 求导，另一方面也要对沿路变化的基 P_j 求导。由联络公式得到

$$\nabla_{c'}c'=\sum_k\left((x^k)''+\sum_{i,j}\Gamma^k_{ij}(x(t))(x^i)'(x^j)'\right)P_k.$$

由于基向量独立，整个向量为零当且仅当每个系数都为零。于是一个几何要求变成了关于两个坐标函数的二阶常微分方程。平面直角坐标中 $\Gamma^k_{ij}=0$，它就退化为 $(x^k)''=0$，解正是匀速直线运动。

定理 5.5.1 (测地线方程与初值唯一性)**.** 曲线 $c(t)=P(x^1(t),x^2(t))$ 满足 $\nabla_{c'}c'=0$ 当且仅当

$$(x^k)''+\Gamma^k_{ij}(x(t))(x^i)'(x^j)'=0,\qquad k=1,2.$$

对任意 $p\in S,v\in T_pS$，给定 $c(0)=p,c'(0)=v$ 后，局部存在唯一解，且速度大小恒定。$\|v\|=1$ 时 t 是弧长参数。

证明. 沿曲线对 $c'=(x^i)'P_i$ 作协变求导，基向量的系数即为方程左侧。化为关于位置、速度的一阶系统，系数光滑，故标准常微分方程初值定理适用。由度量相容性，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|c'\|^2=2\langle\nabla_{c'}c',c'\rangle=0$。 □

这种参数称为仿射参数。非恒定速度的重参数化仍描绘同一条测地轨迹，却未必满足零协变加速度方程。局部存在性也不表示在任意长的时间区间上都存在；不完备曲面的测地线可能在有限时间离开曲面。

要从长度最小推出测地线，需要允许曲线在曲面内作固定端点的微小变形，并计算长度的一阶变化。

定理 5.5.2 (长度第一变分与最短线)**.** 设 $c:[a,b]\to S$ 为单位速度 C^2 曲线，$F(s,t)$ 为固定端点的光滑变分，$F(s,0)=c(s)$，变分向量 $V=\partial_t F|_{t=0}$。则

$$L'(0)=-\int_a^b\langle V,\nabla_T T\rangle\mathrm{d}s.$$

因此光滑正则的最短曲线在弧长参数下必为测地线。

证明. 对 $L(t)=\int_a^b \sqrt{\langle F_s,F_s\rangle}\mathrm{d}s$ 求导，在 $t=0$ 得 $L'(0)=\int\langle D_sV,T\rangle\mathrm{d}s$。分部积分，端点项因 $V(a)=V(b)=0$ 消失，得到 $-\int\langle V,D_sT\rangle\mathrm{d}s$；$V$ 切向，所以只保留切向投影 $\nabla_T T$。

所得积分还告诉我们应当怎样缩短一条不满足测地线方程的曲线。若某内点 $\nabla_T T\neq 0$，取一个支撑在该点附近、在该点为正的非负光滑函数 ϕ，并沿 $V=\phi\nabla_T T$ 变形。这样的切向变分由坐标中 $x(s)+tV^{\mathrm{coord}}(s)$ 构造，于是 $L'(0)=-\int\phi\|\nabla_T T\|^2\mathrm{d}s<0$，与最短性矛盾。 □

例 5.5.3 (旋转曲面的经线与球面大圆). 旋转曲面的经线所在平面同时包含曲面的法线，因此其弧长加速度若非零就沿曲面法向；零加速度点亦满足该条件，所以经线是测地线。球面任一大圆可看作某条旋转轴的经线，故也是测地线。
但连接球面两点的较长大圆弧仍为测地线，却不是最短路；两对径点之间甚至有无穷多条等长的大圆半周。可见“测地线”不能直接理解为“任意两点间唯一最短路”。

圆柱上的测地线可以用另一种方式看清。由例 3.9.3 的局部保长对应，将平面直线 $u(t)=u_0+\alpha t, v(t)=v_0+\beta t$ 卷到圆柱上，得到

$$c(t)=\big(a\cos((u_0+\alpha t)/a),\, a\sin((u_0+\alpha t)/a),\, v_0+\beta t\big),\qquad (\alpha,\beta)\neq(0,0).$$

因为平面直线的协变加速度为零，保长对应将它变成圆柱上的测地线；反过来，每条圆柱测地线在展开后局部都是直线。$\alpha=0$ 给出母线，$\beta=0$ 给出圆周，两者非零时给出圆柱螺线。于是圆和螺线虽在空间中弯曲，在圆柱内部却都可以没有测地曲率。

旋转曲面的这一现象还能统一写成一个守恒关系。

例 5.5.4 (Clairaut 关系). 用母线弧长 s 和旋转角 v 表示旋转面，有 $\mathrm{I}=\mathrm{d}s^2+r(s)^2\mathrm{d}v^2$。测地线方程的角变量一项为 $v''+2(r'/r)s'v'=0$，故 $r(s)^2v'$ 为常数。单位速度时若 θ 是切线与经线的夹角，则 $rv'=\sin\theta$，从而 $r\sin\theta$ 恒定。常数为零给出经线，非零时则限制测地线能到达的最小旋转半径。

局部最短与局部唯一仍然成立，但证明需要指数映射和 Gauss 引理；为避免先使用未建立的工具，将证明放在第 5.7 节。

定理 5.5.5 (局部凸邻域). 曲面每点都有一个邻域 U，使任意 $p,q\in U$ 之间存在唯一的最短测地线段，且该线段完全位于 U 中。

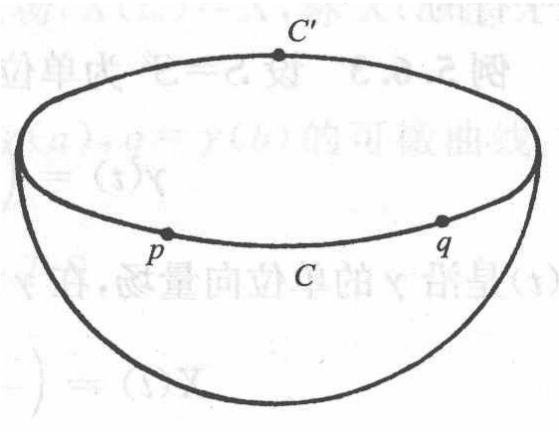


图 5.4: 同一大圆上连接两点的长、短两弧都是测地线，但长弧并非最短线。

5.6 平行与平行移动

现在希望把一个起点处的切向量搬到曲面上另一个点，并在搬动过程中尽量保持方向。直接保持它的三个空间分量不变通常不可行，因为走到别处后它可能不再切于曲面。因此必须先指定一条路径，让向量一面随切平面调整，一面要求它不产生曲面内部的额外变化。

上一节的测地线已经提供了一个例子：它的单位切向量满足协变导数为零。我们把同样的要求用于沿任意给定路径的切向量场，就得到平行。这里固定的是路径 c，未知的是沿路的向量 Y；测地线问题则要求路径自己的速度 c' 平行。二者使用同一求导规则，但未知对象不同。

定义 5.6.1 (沿曲线平行)**.** 沿曲线 $c(t)$ 的切向量场 $Y(t)$ 称为平行的，是指 $\nabla_{c'} Y = 0$。在嵌入曲面上，等价地，普通导数 Y' 始终垂直于曲面。

这个条件是向量场的线性方程，因此一个初始向量就应当决定后续的全部向量；下面确认其存在性与唯一性。

定理 5.6.2 (平行场的存在唯一性)**.** 若 $c : [a, b] \to S$ 分段光滑，给定 $Y(a) \in T_{c(a)}S$，则存在唯一的沿 c 平行的连续向量场（每个光滑段上可微）。坐标中 $Y = Y^k P_k$ 满足

$$(Y^k)' + \Gamma^k_{ij}(c(t))(x^i)' Y^j = 0.$$

证明. 由联络的坐标公式得到上述线性常微分方程。每个坐标段上的初值解存在唯一，沿曲线紧区间用有限个坐标段拼接；重叠处的几何方程相同，唯一性保证拼接一致。 □

由此可把起点切空间中的向量送到终点切空间，而不需要在整个曲面上选择向量场。

定义 5.6.3 (平行移动)**.** 将 $Y(a)$ 送到唯一平行场的终值 $Y(b)$ 的映射 $\mathcal{P}_c : T_{c(a)}S \to T_{c(b)}S$，称为沿 c 的平行移动。

线性方程保留向量的线性组合，度量相容性则控制长度和夹角，因此平行移动应是两个切空间间的刚性比较。

定理 5.6.4 (平行移动保持内积). $\mathcal{P}_c$ 是线性等距同构，逆映射为沿反向曲线的平行移动。连接路径时，平行移动按路径顺序复合。

证明. 线性性由线性微分方程的唯一性得到。若 X, Y 均平行，度量相容性给出 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_{c'} X, Y\rangle + \langle X, \nabla_{c'} Y\rangle = 0$。反向解同一个方程便返回初始向量，故可逆；拼接性质同理由唯一性成立。 □

例 5.6.5 (平面与球面上的平行场). 平面上的平行场就是普通恒定向量场，因此与路径无关。单位球赤道 $c(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ 上的向北向量 $(0, 0, 1)$ 恒定，因而平行。一般余纬 $\varphi \in (0, \pi)$ 的纬线上, 向北单位向量为 $Y = (-\cos\varphi\cos t, -\cos\varphi\sin t, \sin\varphi)$, 其导数为 $Y' = (\cos\varphi\sin t, -\cos\varphi\cos t, 0)$。除赤道 $\cos\varphi = 0$ 外，它非零且切向，所以向北的场不平行。“一直指向北方”不等于平行移动。

例 5.6.6 (绕球面三角形一周). 在单位球上取 $N = (0, 0, 1), A = (1, 0, 0), B = (0, 1, 0)$, 沿大圆短弧 $N \to A \to B \to N$ 平行移动初始向量 $(1, 0, 0)$。沿第一条经线它是运动切向，到 A 成为 $(0, 0, -1)$；沿赤道此向量恒定；沿 $B \to N$ 它是运动切向的负数, 回到 N 时成为 $(0, 1, 0)$。因此一周后转过 $\pi/2$，平行移动依赖路径。

一般地，在局部正交标架中写单位平行场 $Y = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$，平行条件等价于 $\theta' + \omega_{12}(c') = 0$。沿正向圆盘边界一周，转角模 2π 等于

$$-\int_{\partial D} \omega_{12} = \iint_D K \mathrm{d}A.$$

这将平行移动的路径依赖与 Gauss 曲率直接联系起来。例 5.6.6 中的三角形, 正是例 5.3.4 在单位球上的八分之一球面：面积为 $\pi/2$，角度超额为 $\pi/2$，平行移动一周后的转角也为 $\pi/2$。三个计算从不同角度记录了同一块区域的总曲率。

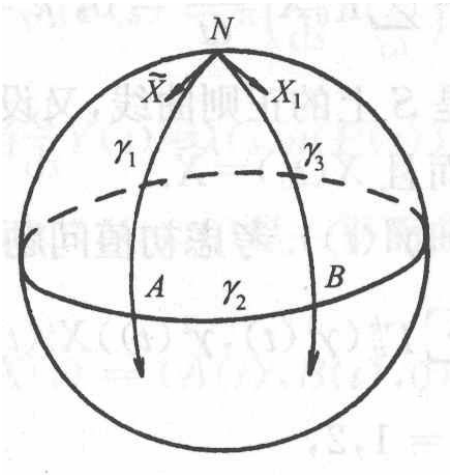


图 5.5: 沿球面三角形边界平行移动后，向量方向发生改变。

5.7 法坐标系与测地极坐标系

一般参数坐标是人为选取的，未必反映点与点的几何联系。我们希望像平面上从原点沿直线走到目标点那样，用一个切向量记录曲面上的附近点。在平面里，给定起点 p 和向量 v，以速度 v 走一个单位时间，终点就是 $p+v$；向量的方向决定走向，长度决定走多远。

曲面上不能直接把 $p+v$ 当成曲面点，但可以把直线换成测地线。从 p 以初始速度 v 出发，取它在时间 1 的终点。这样把“方向和路程”都编码在一个切向量中，就得到指数映射。

定义 5.7.1 (指数映射). 固定 $p \in S$，令 c_v 为满足 $c_v(0) = p, c_v'(0) = v$ 的测地线。在足够小的 $v \in T_pS$ 上定义 $\exp_p(v) = c_v(1)$，称为指数映射。

测地线方程与常数缩放相容，唯一性给出 $c_v(t) = \exp_p(tv)$。因此从 0 出发的径向线段在指数映射下成为测地线；长度由 $\|v\|$ 决定。

这里固定时间为 1 只是统一记法，并非要求所有测地线都走相同的长度；实际路程是 $\|v\|$。平面上 $\exp_p(v) = p + v$。半径 a、球心在原点的球面则有

$$\exp_p(v) = \cos\left(\frac{\|v\|}{a}\right) p + a \sin\left(\frac{\|v\|}{a}\right) \frac{v}{\|v\|} \quad (v \neq 0), \qquad \exp_p(0) = p.$$

右端沿由 p, v 张成的平面中的大圆前进，求时间导数可验证初速度为 v。当 $\|v\| = \pi a$ 时，不同方向都到达对径点，所以指数映射并不总是全局一一对应。

要将它作为坐标，需先确认原点附近不会出现这样的重合。其在原点的微分恰好是恒等映射。

定理 5.7.2 (法坐标的存在). $\exp_p$ 在 $0 \in T_pS$ 附近光滑，且 $(\mathrm{d}\exp_p)_0 = \mathrm{id}$，故它在某邻域为微分同胚。选 T_pS 的单位正交基 e_1, e_2，以

$$q = \exp_p(y^1 e_1 + y^2 e_2)$$

定义的 (y^1, y^2) 称为法坐标。

证明. 常微分方程解光滑依赖初始数据，故指数映射光滑。沿直线 tv 有 $(\mathrm{d}\exp_p)_0 v = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_0 \exp_p(tv) = c_v'(0) = v$。逆函数定理给出局部微分同胚。 □

只知道原点微分为恒等还不足以控制距离。下面的 Gauss 引理说明径向方向在整个法坐标邻域中都与等半径方向正交。

引理 5.7.3 (Gauss 引理). 在指数映射的定义域内，对 $v, w \in T_pS$ 有

$$\langle (\mathrm{d}\exp_p)_v v, (\mathrm{d}\exp_p)_v w \rangle = \langle v, w \rangle.$$

等价地，法坐标的度量满足 $\sum_j g_{ij}(y) y^j = y^i$。

证明. 我们要比较指数映射下径向向量 v 与任意变化方向 w 的内积，因此让初始速度沿 $v + aw$ 变化，考虑测地线族 $F(t, a) = \exp_p(t(v + aw))$。在 $t = 1, a = 0$ 处，F_t, F_a 恰好是待比较的两个向量。对每个 a，t 曲线是常速测地线，速度平方为 $\|v + aw\|^2$。利用

无挠性，

$$\partial_t\langle F_t, F_a\rangle = \langle F_t, \nabla_t F_a\rangle = \langle F_t, \nabla_a F_t\rangle = \frac{1}{2}\partial_a\|v + aw\|^2.$$

在 $t = 0$，$F_a = 0$。从 0 积分至 1，再令 $a = 0$，便得所需公式。取 $v = \sum y^j e_j, w = e_i$ 即得坐标恒等式。 □

特别地，$g_{ij}(0) = \delta_{ij}$。又径向测地线的法坐标为 $y(t) = tv$，在 $t = 0$ 代入测地线方程得 $\Gamma^k_{ij}(0)v^iv^j = 0$；由下标对称性及 v 任意，$\Gamma^k_{ij}(0) = 0$。度量相容性进而给出 $\partial_k g_{ij}(0) = 0$。

把初始速度写成极坐标，就能把径向距离与方向角分离；Gauss 引理保证此坐标下没有混合项。

定义 5.7.4 (测地极坐标). 令 $y^1 = \rho\cos\theta, y^2 = \rho\sin\theta$，在 $\rho > 0$ 且选定角度分支的法坐标邻域中，称 (ρ, θ) 为测地极坐标。中心 $\rho = 0$ 是极坐标的退化点，不是曲面的奇点。

固定半径后，沿角度变化 $\mathrm{d}\theta$ 所走的长度由角向系数决定。若记它的平方根为 A，相差很小初始角度的两条径向测地线，在半径 ρ 处的间距一阶近似就是 $A\,|\mathrm{d}\theta|$。所以 A 记录这些测地线如何分离；下面把它与 Gauss 曲率联系起来。

定理 5.7.5 (测地极坐标中的度量). 有

$$\mathrm{I} = \mathrm{d}\rho^2 + G(\rho,\theta)\mathrm{d}\theta^2, \qquad A = \sqrt{G} > 0,$$

且对固定 θ，

$$A_{\rho\rho} + KA = 0, \qquad A(0,\theta) = 0, \quad A_\rho(0,\theta) = 1.$$

证明. 径向曲线为单位速度测地线，所以 $g_{\rho\rho} = 1$。Gauss 引理给出径向与角向正交，故 $g_{\rho\theta} = 0$。原点附近 $g_{ij}(y) = \delta_{ij} + O(\|y\|^2)$，因此 $A = \rho + O(\rho^3)$，给出初值。将正交坐标曲率公式用于 $E = 1, G = A^2$，得 $K = -A_{\rho\rho}/A$。 □

例 5.7.6 (常曲率的测地极坐标). 解上述初值方程：若 $K = 0$，$A = \rho$；若 $K = 1/a^2$，$A = a\sin(\rho/a)$；若 $K = -1/a^2$，$A = a\sinh(\rho/a)$。正曲率使同样半径的测地圆周较短，负曲率使其较长。球面公式须限制在指数映射单射的范围内，不能跨越对径点继续当作一张坐标图。

5.7.1 局部最短性质与凸邻域

Gauss 引理还给出长度估计。若 $q = \exp_p(v)$ 位于小法坐标球内，任意从 p 到 q 且留在其中的分段光滑曲线都满足

$$L = \int \sqrt{\rho'^2 + G\theta'^2}\,\mathrm{d}t \geq \int |\rho'|\,\mathrm{d}t \geq \|v\|.$$

等号要求方向角恒定、径向不反复，故最短轨迹唯一为径向测地线。经过中心的情形可从首次到达小半径圆时开始估计，再令半径趋零。若先取一个较大的法坐标球，再限制 q 到较小球中，任何先离开大球的曲线仅到达边界的长度就已超过径向线段。因此该径向线段也在所有曲面曲线中最短。

上面的论证固定了起点 p。定理 5.5.5 还要求：在同一个邻域中任取两个端点，都有唯一最短线段，而且线段始终留在邻域里。为此先使测地线的存在范围对两个端点同时有效，再用一个沿测地线严格凸的函数控制线段的位置。

固定原点 o 的一个小坐标球，映射 $(p,v)\mapsto(p,\exp_p v)$ 在 $(o,0)$ 处微分可逆，故由带参数逆函数定理，在足够小的 p,q 范围内，二者之间有唯一的小测地线，且光滑依赖端点。缩小范围可使这些线段全部留在一个固定较大的坐标球内。

为了保证连接两点的测地线不跑出选定的小邻域，我们需要一个沿测地线严格凸的函数。取 $f(x)=\sum_i (x^i)^2$，它的协变 Hesse 型定义为

$$(\nabla^2 f)(X,Y)=X(Yf)-(\nabla_X Y)f,\qquad (\nabla^2 f)_{ij}=\partial_i\partial_j f-\Gamma_{ij}^k\partial_k f.$$

原点处 $\partial_k f=0$，所以矩阵为 $2I$，正定；连续性保证缩小大球后仍处处正定。沿其中任意非恒定测地线，$(f\circ c)''=\nabla^2 f(c',c')>0$。所以两端在子水平集 $U=\{f<\varepsilon^2\}$ 内的小测地线，其全段也在 U 内。

还需排除绕到远处再返回的更短曲线。再固定一个较小的大球，使它包含于每个 $p\in U$ 的统一法邻域内；这可由带参数逆函数定理所得的开集在 (o,o) 附近包含乘积邻域得到。由前面的 Gauss 引理估计，这条线段在该法邻域内最短且唯一。坐标球闭包上度量与 Euclid 度量有统一上下界；再缩小 ε，使该线段长度小于从 U 到大球边界所需的统一正长度，则任何离开大球的竞争曲线都更长。这证明在所有曲面曲线中仍为唯一最短线段，且它留在 U 内。

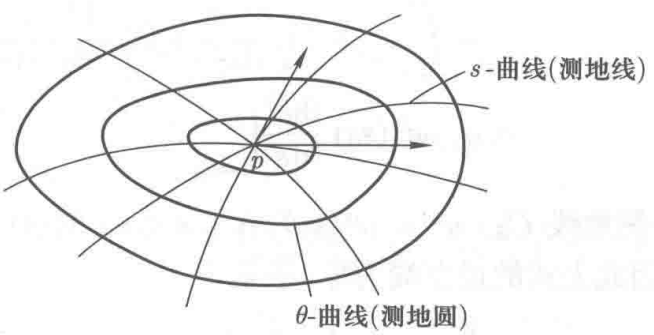


图 5.6: 测地极坐标网：径向曲线为测地线，等半径曲线为测地圆；图中 s,θ 对应正文的 ρ,θ。

5.8 可展曲面

圆柱的展开一直贯穿前面的讨论。由绝妙定理，局部保长到平面的曲面必须满足 $K=0$；现在反过来问，$K=0$ 是否已经足够？我们先在含有直母线的曲面中计算这一条件，再借助联络形式构造平面坐标。

定义 5.8.1 (直纹面与可展曲面). 若曲面有正则参数表示 $P(u,v)=c(u)+v\ell(u)$，其中 $\|\ell\|=1$，称为直纹面；u 固定的直线称为直母线，c 称为准线。若

$$(c',\ell,\ell')=0,$$

则称为可展曲面。ℓ 恒定给出柱面，c 恒定给出锥面，ℓ 沿准线切向给出切线面；均只讨论参数化正则的部分。

上述混合积条件表示母线移动时没有扭离由相邻母线决定的平面。计算基本形式可把它与法向和曲率直接联系起来。

定理 5.8.2 (可展性的等价条件). 对正则直纹面, 下列条件等价: 混合积 $(c',\ell,\ell')=0$; 切平面沿每条母线不变；$K=0$；每点附近与平面保长对应。

证明. $P_u=c'+v\ell', P_v=\ell$，所以未单位化法向为 $(c'+v\ell')\times\ell$。沿 v 方向它的方向不变，当且仅当 c',ℓ,ℓ' 线性相关。又 $P_{vv}=0$，故 $N=0$，而

$$M=\frac{(c',\ell,\ell')}{\|P_u\times P_v\|},\qquad K=-\frac{(c',\ell,\ell')^2}{\|P_u\times P_v\|^4}.$$

因而前三者等价。局部保长到平面必保持 $K=0$。

反之，要把度量写成平面的 $\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2$，只需找到一组能分别积分成 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y$ 的正交余标架。原有余标架未必闭，但我们还可以转动标架。

在任一充分小的单连通邻域内，$K=0$ 给出 $\mathrm{d}\omega_{12}=0$，故 $\omega_{12}=\mathrm{d}f$。若把标架旋转一个随点变化的角 θ，即

$$\tilde e_1=\cos\theta\, e_1+\sin\theta\, e_2,\qquad \tilde e_2=-\sin\theta\, e_1+\cos\theta\, e_2,$$

对第一式求微分并与 $\tilde e_2$ 作内积，得到新的联络形式 $\tilde\omega_{12}=\omega_{12}+\mathrm{d}\theta$。因此选择 $\theta=-f$，恰好消去原来的转动项。

记新余标架为 η_1,η_2，前两条结构方程变成 $\mathrm{d}\eta_1=\mathrm{d}\eta_2=0$。于是局部可分别积分为 $\eta_1=\mathrm{d}x,\eta_2=\mathrm{d}y$。旋转保持两者独立，所以 (x,y) 的 Jacobi 行列式非零，确实给出一组局部坐标。而旋转也不改变长度平方，故

$$\mathrm{I}=\omega_1^2+\omega_2^2=\eta_1^2+\eta_2^2=\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2.$$

把曲面点送到平面点 (x,y)，就完成了所需的局部保长对应。 □

最后这段证明事实上适用于任意 $K=0$ 的曲面，并不要求预先知道它直纹。在非平点附近，还可以利用 Codazzi 方程证明，零主曲率对应的主曲率线都是直线：取主标架使 $\omega_{13}=\kappa_1\omega_1$、$\omega_{23}=0$、$\kappa_1\neq0$，则 $0=-\omega_{12}\wedge\kappa_1\omega_1$，故 $\omega_{12}(e_2)=0$。于是 $D_{e_2}e_2=0$，e_2 的积分曲线是直线。

要辨认可展直纹面的具体类型，可以沿每条母线重新选择准线点，使新的准线速度尽量与母线一致。

命题 5.8.3 (可展直纹面的局部类型). 若 $\ell'\equiv0$, 曲面为柱面。若 $\ell'\neq0$, 写 $c'=a\ell+b\ell'$, 令 $\tilde c=c-b\ell$, 则 $\tilde c'=(a-b')\ell$。在 $a-b'$ 恒为零的区间上, 曲面为锥面；在 $a-b'\neq0$ 的区间上，曲面为正则曲线 $\tilde c$ 的切线面。平面可视为这些类型的退化情形。

证明. 因 $\|\ell\| = 1$，$\ell \perp \ell'$。当 $\ell' \neq 0$ 时两者独立，可展条件使 c' 属于它们张成的平面，故所写系数存在。直接求导得 $\tilde{c}' = (a - b')\ell$。若它恒为零，母线均经过固定点 $\tilde{c}$；若非零，母线正是 $\tilde{c}$ 的切线。 □

在 ℓ' 或 $a - b'$ 的零集边界，类型可能变化，不能不加条件地断言整张连通光滑可展曲面属于同一种类型。锥顶、切线面的回归边等也可能是奇异处，不属于正在讨论的正则部分。

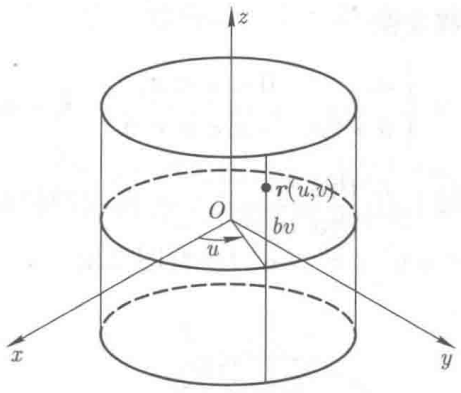


图 5.7: 圆柱面是可展曲面的一个例子，直母线沿固定方向。

例 5.8.4 (三类曲面的具体展开). 柱面先把准线投影到垂直于固定母线的平面，再用该投影的弧长 s 为参数，得到 $\mathrm{I} = \mathrm{d}s^2 + \mathrm{d}v^2$。
锥面写成 $c_0 + v\ell(u)$，将单位球面曲线 ℓ 以弧长 u 参数化，有 $\mathrm{I} = v^2\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2$。映到平面 $(x, y) = (v\cos u, v\sin u)$ 即保长，须取 $v \neq 0$ 并限制角度以保持局部单射。
切线面 $P(s, v) = c(s) + vT(s)$ 满足

$$\begin{aligned} P_s &= T + v\kappa N, \\ P_v &= T, \\ \mathrm{I} &= (1 + v^2\kappa^2)\mathrm{d}s^2 + 2\mathrm{d}s\mathrm{d}v + \mathrm{d}v^2. \end{aligned}$$

正则条件为 $v\kappa \neq 0$。此度量不含挠率，因此用同一曲率函数构造一条平面单位速度曲线，其切线面给出平面中的正则区域，并与原切线面保长对应。

第六章　高维 Euclid 空间的曲面

6.1　高维曲面

前面曲面的参数只有两个，但切空间、内积和正交投影这些构造本身并不依赖这个数目，因此可以继续推广。需要分别区分两个维数：有多少个独立参数，决定曲面自身的维数；放在多大的空间里，决定环境维数。例如二维曲面即使放在 $\mathbb{R}^4$ 中，仍只需两个参数，切空间也仍为二维，但它的法空间现在有两个独立方向。

这正是第二基本形式要改变的地方。在 $\mathbb{R}^3$ 的曲面上，法空间只有一维，选定单位法向量后，一个数就能记录法向偏离；若法空间是二维或更高维，一个数便不够了，必须直接记录整个法向量。下面仍从参数化出发，逐步作出这一推广。

先保留参数化的观点，将“两个独立参数”换成“m 个独立参数”。

定义 6.1.1 (高维曲面片与曲面). 设 $U \subset \mathbb{R}^m$ 为单连通开集，$m < n$。光滑映射 $P : U \to \mathbb{R}^n$ 若为到像集的同胚，且 $\operatorname{rank}(\partial P/\partial x^i) = m$，称为 m 维曲面片。若 $S \subset \mathbb{R}^n$ 的每点都有空间邻域，其与 S 的交为这样的曲面片，则称 S 为 m 维正则曲面（嵌入子流形）。

容许参数变换是参数域间的光滑微分同胚；链式法则保证秩保持，故同一几何曲面片可用不同参数描述。取 $m = 1$，这里定义的就是正则曲线；取 $m = 2, n = 3$，就是此前研究的三维空间中的曲面。

曲面上的速度向量仍由参数方向张成；法方向则取正交补，无需求助于特殊维数中的叉积。

定义 6.1.2 (切空间与法空间). 记 $P_i = \partial_i P$，定义 $T_pS = \operatorname{span}\{P_1, \dots, P_m\}$，$N_pS = (T_pS)^\perp$；它们维数分别为 $m, n-m$。仿射平面 $p + T_pS$ 称为切平面。

若曲线 $c(t) = P(x(t))$，则 $c' = \sum_i (x^i)' P_i$；反过来任意这样的线性组合都由参数直线的像实现。因此该切空间仍是所有曲线速度的集合，且与参数无关。

函数和向量场的光滑性可在参数域中检查：f 光滑是指 $f \circ P$ 光滑，$X = X^i P_i$ 光滑是指各系数 X^i 光滑。若给定向量场，沿它运动的曲线便由这些系数决定。

定义 6.1.3 (积分曲线). 若 $c'(t) = X(c(t))$，称 c 为向量场 X 的积分曲线。它的参数方程为 $(x^i)' = X^i(x(t))$。

常微分方程初值定理给出过任一点的局部唯一积分曲线。沿它有 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ c) = Xf$，其中 $Xf = X^i \partial_i f$。由普通乘积法则可知 $X(fg) = (Xf)g + fXg$，且

$$[X, Y] = (X^i \partial_i Y^k - Y^i \partial_i X^k) P_k.$$

二阶导数在交换子中抵消，这与二维的导子观点完全相同。

将 P_{ij} 分解到切空间与法空间，仍得到自然标架的基本公式；其法向部分现在是一个向量，而非单个系数。

定义 6.1.4 (高维曲面的基本形式). 写 $P_{ij} = \Gamma_{ij}^k P_k + N_{ij}$，其中 $N_{ij} \in N_p S$。定义

$$\begin{aligned} \mathrm{I}(X,Y) &= \langle X, Y\rangle, \\ g_{ij} &= \langle P_i, P_j\rangle, \\ \mathbf{II}(X,Y) &= X^i Y^j N_{ij}. \end{aligned}$$

II 是对称的法向量值第二基本形式。

我们在二维曲面中已经见过：换参数引入的二阶附加项都在切空间内，取法向投影后便消失。这个理由与法空间的维数无关，因此也适用于这里的向量值第二基本形式。

定理 6.1.5 (基本形式的不变性与基本公式). $\mathrm{I}, \mathbf{II}$ 均与参数无关，且

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{k\ell}(\partial_i g_{j\ell} + \partial_j g_{i\ell} - \partial_\ell g_{ij}), \qquad D_X Y = \nabla_X Y + \mathbf{II}(X,Y),$$

其中 $\nabla_X Y = (D_X Y)^\top$，$\nabla_X Y = X^i(\partial_i Y^k + \Gamma_{ij}^k Y^j) P_k$。

证明. I 本就是环境内积的限制。换参数时，$P_{\tilde{i}\tilde{j}}$ 的额外项是 P_k 的线性组合，投影到法空间后消失，所以 N_{ij} 按协变二阶张量变换，**II** 不变。对 g_{ij} 求导后作三项相加减，和定理 3.7.1 一样得到 Γ 公式。再展开 $D_X(Y^j P_j)$，其法向部分为 $X^i Y^j N_{ij}$，切向部分即所列联络公式。 □

沿曲线的绝对微分为

$$\frac{DY}{\mathrm{d}t} = \left((Y^k)' + \Gamma_{ij}^k (x^i)' Y^j\right) P_k = (Y')^\top.$$

它正是协变导数。联络对第一输入为函数线性，对第二输入满足 Leibniz 法则，仍然无挠且与度量相容；这些性质的证明与定理 5.4.2、5.4.4 逐项相同，指标范围改为 $1, \dots, m$ 即可。

例 6.1.6 (超曲面与球面). 当 $m = n-1$，局部法空间由单位法向 n 张成，$N_{ij} = b_{ij} n$，基本公式成为

$$P_{ij} = \Gamma_{ij}^k P_k + b_{ij} n, \qquad n_i = -b_{ij} g^{jk} P_k.$$

混合偏导的切向、法向比较仍给出式 (3.7.2)、(3.7.3)，所有切向指标取 $1, \dots, m$。满足这些兼容条件的正定 g 和对称 b 局部决定超曲面，证明沿用矩阵方程可积性与位置积分；在多个坐标方向上依次积分，任意两方向的兼容条件保证剩余方程都成立。半径 a 的 m 维球面取外法向 $n = P/a$，有 $\mathbf{II}(X,Y) = -\langle X, Y\rangle n/a$。一维曲线的情形则为 $\mathbf{II}(T,T) = \kappa N$，在零曲率点应直接理解为曲率向量 c''。

也可以实际看一个法空间为二维的例子。取 $a, b > 0$，在足够小的角度范围内令

$$P(u,v) = (a\cos u, a\sin u, b\cos v, b\sin v) \in \mathbb{R}^4.$$

两个切向量分别只在前两个、后两个坐标中非零，因而相互垂直。法空间可取单位正交基

$$n_1 = (\cos u, \sin u, 0, 0),$$
$$n_2 = (0, 0, \cos v, \sin v).$$

由 $P_{uu} = -an_1, P_{uv} = 0, P_{vv} = -bn_2$，得到

$$\mathrm{I} = a^2\mathrm{d}u^2 + b^2\mathrm{d}v^2, \qquad \mathbf{II} = -an_1\mathrm{d}u^2 - bn_2\mathrm{d}v^2.$$

沿两条参数线的法向弯曲落在两个不同的法方向上，因而不能选一个单位法向量就把全部信息改写成标量。同时它的度量系数为常数，局部可以保长到平面；空间中的弯曲与内部曲率仍然需要区分。

回看定理 5.4.7 中 K 的内蕴表达式，它实际上是在比较由两个切向量张成的平面。二维曲面的切空间本身只有这一个二维平面；当切空间维数大于 2 时，我们仍可对每个二维子空间作同样的计算，但所得数值可能随子空间改变。这就引出截面曲率。

定义 6.1.7 (截面曲率). 定义 $R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$。对二维子空间 $\sigma = \operatorname{span}\{X, Y\} \subset T_pS$，定义

$$K(\sigma) = \frac{\langle R(X,Y)Y, X\rangle}{\langle X, X\rangle\langle Y, Y\rangle - \langle X, Y\rangle^2}.$$

这里 R 与前章采用同一符号约定。主教材第六章另将四元形式写成

$$\mathcal{R}(X_1, X_2, X_3, X_4) = \langle X_1, R(X_3, X_4)X_2\rangle.$$

它与第 5.4 节的四元记号满足 $\mathcal{R}(X_1, X_2, X_3, X_4) = R(X_3, X_4, X_2, X_1)$；按这个次序对照即可。

截面曲率只有在换基不改变比值时才良定义，而基本公式还应给出它的外蕴计算式。

定理 6.1.8 (截面曲率的良定义与 Gauss 公式). 上述 $K(\sigma)$ 与 X, Y 的基选择无关，并且

$$\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle \mathbf{II}(X,W), \mathbf{II}(Y,Z)\rangle - \langle \mathbf{II}(X,Z), \mathbf{II}(Y,W)\rangle.$$

二维曲面的截面曲率即 Gauss 曲率；半径 a 的高维球面所有截面曲率均为 $1/a^2$。

证明. 定义中的 Leibniz 项抵消，故 R 在一点只依赖三输入的值；度量相容性同样给出前两项及后两项的交替性。因此换二维基时分子、分母都乘以换基行列式的平方，比例不变。

环境空间曲率为零。将基本公式代入 $D_XD_YZ - D_YD_XZ - D_{[X,Y]}Z = 0$ 并与切向 W 作内积；对法向量场 ν 使用 $\langle D_X\nu, W\rangle = -\langle \nu, \mathbf{II}(X,W)\rangle$，即得 Gauss 公式。对于三维 Euclid 空间中的二维曲面，这一公式就是定理 5.4.7 中的 Gauss 方程；将球面的 $\mathbf{II}$ 代入，分子为分母的 $1/a^2$ 倍。 □

最后，平行移动与测地线不需要叉积，也无需单独的单位法向，可以直接使用协变导数定义。

定义 6.1.9 (高维曲面上的平行与测地线). 沿 c 的向量场满足 $DY/\mathrm{d}t = 0$ 时称为平行；曲线满足 $Dc'/\mathrm{d}t = 0$ 时称为仿射参数测地线。

坐标方程仍为

$$\begin{aligned}(Y^k)' + \Gamma^k_{ij}(x^i)'Y^j &= 0,\\ (x^k)'' + \Gamma^k_{ij}(x^i)'(x^j)' &= 0, \qquad k = 1, \dots, m.\end{aligned}$$

线性与一般常微分方程初值定理分别保证平行场和测地线局部存在唯一；平行场的内积保持，因为度量相容性使其导数为零。长度第一变分的证明不使用维数 2，所以光滑最短线段仍为测地线。高维球面上的单位速度测地线满足 $c'' = -c/a^2$，解位于由 $c(0), c'(0)$ 张成的二维平面内，故为大圆。

6.2 微分流形

前面构造联络、测地线和平行移动时，最后的公式只用到了度量与坐标变换。既然如此，定义这些对象是否一定要先给出一个嵌入 Euclid 空间的曲面？我们先把局部坐标及它们的拼接保留下来，建立微分流形；度量则在需要测量长度时另行给定。

定义 6.2.1 (拓扑流形与坐标图). 若 Hausdorff 拓扑空间 M 的每点都有一个开邻域 U，以及到 $\mathbb{R}^m$ 中开集的同胚 $\varphi : U \to \varphi(U)$，称 M 为 m 维拓扑流形，(U, φ) 称为坐标图。φ 的各分量称为局部坐标。

Hausdorff 条件表示不同两点有不相交的开邻域。沿用主教材本节的局部讨论时，上述条件已经足够；通常现代定义还要求第二可数，即拓扑有可数基，本笔记的具体例子也均满足这一条件。

这里坐标图的方向是从对象到坐标：φ 把流形上的点变成一组实数。以前参数曲面 $P : D \to S$ 的方向正好相反，因而在一张曲面片上，对应的坐标图就是 P^{-1}。这种方向变化并没有改变我们使用坐标的方法。

若同一个点同时落在两张图中，它便有两组坐标。把第一组坐标先经 φ_α^{-1} 还原成该点，再经 φ_β 读出第二组坐标，得到的就是 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$。它的定义域和像都在 Euclid 空间中，所以是否光滑可以用已经熟悉的多元微积分判断。要求这些坐标转换光滑，才能保证在一张图中可微的对象，换到另一张图中仍可微。

定义 6.2.2 (光滑图册与微分流形). 覆盖 M 的一族坐标图 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ 若满足：所有重叠处的过渡映射

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

均为光滑微分同胚，则称其为光滑图册。它确定的光滑结构与 M 合称为微分流形。

把与图册中每张图都光滑相容的坐标图全部加入，得到唯一极大图册；两个图册若并集仍相容，就确定同一光滑结构。所以更换相容的坐标图，只是更换同一光滑结构的局部描述。先前的嵌入曲面由其局部参数化的逆映射给出坐标图，自然成为微分流形。

例 6.2.3 (实射影空间). 在 $\mathbb{R}^{m+1}\setminus\{0\}$ 上令 $x\sim y$ 当且仅当 $y=\lambda x$，$\lambda\neq 0$。商空间 $\mathbb{R}P^m$ 的点就是过原点的直线，写作 $[x^1:\cdots:x^{m+1}]$。令

$$U_i=\{[x]:x^i\neq 0\},\quad \varphi_i([x])=(x^1/x^i,\dots,\widehat{x^i/x^i},\dots,x^{m+1}/x^i).$$

比值不随齐次坐标的非零倍乘而变，所以图映射良定义；其逆是在第 i 位插入 1 后取等价类。重叠处从第 i 张图换到第 j 张图，只需将各分量再除以非零的 x^j/x^i，故过渡映射光滑。

以 $\mathbb{R}P^2$ 为例，在 $x^3\neq 0$ 的图中，每条直线可以写成 $[u:v:1]$。如果同时有 $u\neq 0$，就可以改用第一坐标为 1 的表示

$$[u:v:1]=[1:v/u:1/u].$$

因此这两张图的过渡映射具体为 $(u,v)\mapsto(v/u,1/u)$，在 $u\neq 0$ 的重叠区域光滑。这里归一化齐次坐标的目的，正是从描述同一条直线的无穷多个向量中选出唯一代表，从而得到真正的局部坐标。

还需检查拓扑条件：$\mathbb{R}P^m$ 同胚于 S^m 上将对径点粘合的商。两条不同直线对应的两个有限对径点集有正距离，可取不相交的对径对称小邻域，故商为 Hausdorff；有限个上述图提供可数基。因此它确实是一个 m 维微分流形。

6.2.1 由曲线定义切空间

先明确流形上的光滑函数与曲线：函数 f 光滑，是指每张图中的 $f\circ\varphi^{-1}$ 光滑；曲线 γ 光滑，是指其坐标表达 $\varphi\circ\gamma$ 光滑。过渡映射光滑及链式法则保证这些定义与所用坐标图无关。

抽象流形没有位置向量，不能直接把两点相减。曲线仍能作用于函数：若 $\gamma(0)=p$，对定义在 p 邻域的光滑函数 f 可取 $(f\circ\gamma)'(0)$。两条曲线若对所有函数给出同一方向导数，应代表同一个切向量。

定义 6.2.4 (曲线等价与切向量). 对经过 p 的光滑曲线，规定

$$\gamma_1\sim\gamma_2\quad\Longleftrightarrow\quad(f\circ\gamma_1)'(0)=(f\circ\gamma_2)'(0)$$

对每个局部光滑函数 f 都成立。全体等价类组成 T_pM，其元素称为切向量。

这个定义看起来要求比较所有光滑函数，实际上只需比较一张图中的 m 个坐标速度。原因仍是链式法则：任意函数沿曲线的变化率，等于它的各坐标偏导与坐标速度的乘积之和。如果坐标速度相同，所有函数的方向导数便相同；反过来，坐标函数本身也是可供比较的光滑函数。

这样，曲线的等价类就由 m 个数记录。接下来可以借这些数定义加法、数乘，再验证换图不会改变这些运算，从而得到切空间。

命题 6.2.5 (切空间的坐标表示)**.** 在任一坐标图 $x = (x^1, \dots, x^m)$ 中，$\gamma_1 \sim \gamma_2$ 当且仅当所有 $(x^i \circ \gamma_1)'(0) = (x^i \circ \gamma_2)'(0)$。每个 $X \in T_pM$ 唯一表示为

$$X = \sum_i a^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p, \qquad Xf = \sum_i a^i \partial_i (f \circ x^{-1})(x(p)).$$

这些表示使 T_pM 成为 m 维实向量空间。

证明. 必要性只需取 $f = x^i$；充分性由链式法则得到。任意 $a \in \mathbb{R}^m$ 可由坐标直线 $x(p) + ta$ 的逆像曲线实现，因此等价类与 $\mathbb{R}^m$ 一一对应。用速度向量的加法与数乘定义等价类的运算；换坐标时速度由可逆 Jacobi 矩阵线性变换，故运算与图的选择无关。坐标轴方向对应所列基，唯一性随之成立。 □

切向量于是也可视为作用在函数芽上的导子，满足

$$\begin{aligned} X(f+g) &= Xf + Xg, \\ X(fg) &= Xf\, g(p) + f(p) Xg, \\ (X+Y)f &= Xf + Yf, \\ (aX)f &= aXf. \end{aligned}$$

反过来，每个满足这些规则的点导子都由坐标导子线性组合给出；证明使用命题 4.1.5 的局部 Taylor 展开。这说明嵌入曲面中的速度、坐标中的分量及函数上的方向导数是同一切向量的三种描述。

逐点给出切向量仍可能毫无连续性，因此向量场还需一个与坐标无关的光滑性条件。

定义 6.2.6 (流形上的光滑向量场)**.** 向量场是逐点指定 $X_p \in T_pM$ 的对象。若对每个光滑函数 f，$p \mapsto X_p f$ 仍光滑，则称 X 为光滑向量场。

局部展开 $X = X^i \partial_i$ 后，该条件等价于各 X^i 光滑：必要性可对坐标函数作局部截断后应用定义，充分性则来自 $Xf = X^i \partial_i f$。

至此，坐标、切空间和求导均已不依赖环境空间。若再在每个切空间上指定光滑变化的正定内积 g，就得到 Riemann 度量；由 Koszul 公式可定义 Levi-Civita 联络，进而讨论曲率、平行移动和测地线。于是前面从曲面内部测量出发建立的概念，可以在抽象流形上继续使用。这里要额外给定的是度量，光滑结构本身只提供求导所需的结构。后续系统理论属于现代微分几何。

附录 A　适用条件速查

A.1　常用结论的条件与边界

这里汇总正文中容易被省略的条件。使用公式时先确认对象与参数，再检查非零条件和局部范围。

结论	必须检查的条件	正文位置及边界
弧长参数	曲线正则；积分基点取参数区间内部	引理 2.2.2；端点反常积分未必有限。
Frenet 标架与挠率	$\kappa > 0$；一般参数须 $P' \times P'' \neq 0$	定理 2.5.1、2.5.2。
曲线论基本定理	给定正曲率及足够光滑的挠率；固定弧长区间	定理 2.6.1；不固定位置时仅在固有运动意义下唯一。
旋转指标与凸性	正则、简单、闭合；凸性判别另需 C^2	定理 2.7.6、2.7.8；定向决定符号。
正则曲面片	秩为 2，且到像集同胚	定义 3.1.3；正则参数化不自动全局单射。
面积积分	参数图单射；一般覆盖需计重	命题 3.3.4。
第二基本形式	先固定单位法向量	命题 3.4.3；换坐标与换法向是两件事。
法曲率与 Meusnier 公式	方向非零；涉及主法向量时还需曲线 $\kappa > 0$	定理 3.5.2；向量形式允许零曲率。
Gauss 映射面积比	分清有向面积与普通面积，局部单射再谈像集面积	第 3.7.1 小节；普通伸缩率为 $\lvert K\rvert$。
曲面论基本定理	g 正定、b 对称，并满足 Gauss、Codazzi 兼容条件	定理 4.4.3；首先得到局部曲面片。
Gauss–Bonnet	紧致定向区域，分段光滑边界及一致外角约定	定理 5.3.3；圆盘右侧才是 2π。
测地线与最短路	零协变加速度使用仿射参数；最短性质需限制邻域	定理 5.5.2、5.5.5。
平行移动	指定整条路径与初始向量	定理 5.6.2；端点相同不保证映射相同。
测地极坐标	排除中心、固定角度分支，并限制在指数映射单射区域	定理 5.7.5。

结论	必须检查的条件	正文位置及边界
可展曲面的分类	只在正则部分及类型稳定的参数区间分类	命题 5.8.3；过渡点可改变类型。
高维第二基本形式	值在法空间，不能总当作标量	定义 6.1.4；超曲面选法向后才可用标量矩阵。

A.2 教材与记号对应

本笔记按孟道骥、梁科《微分几何》第三版（高等教育出版社，2016）的六章顺序组织；陈维桓《微分几何》第二版（北京大学出版社，2017）用于补充几何解释、证明与例子。

主教材的 $\Lambda^k T$ 在第 4.1 节写为 $\Lambda^k T^*$，以明确其协变性质；外积采用主教材的归一化，积分按坐标系数约定。曲率张量统一采用第 5.4.5 条定义，四元形式的不同输入排列在第 6.1 节明确对应。参数变换的矩阵 J 沿用原稿的按行排列约定，不能与其转置混用。