COURSE NOTES

Spring 2025

点集拓扑学

Point-Set Topology

Runkun Liu

Nankai University

目录

记号约定 **iii**

第一章 集合、映射与实数 **1**
1.1 集合、映射与关系 1
1.2 实数公理 4
1.3 可数集 6

第二章 实直线与平面的拓扑 **10**
2.1 实直线的拓扑 10
2.2 平面的拓扑 15

第三章 度量空间 **20**
3.1 度量、开集与闭集 20
3.2 完备度量空间 25
3.3 序列紧度量空间 31

第四章 拓扑空间 **33**
4.1 拓扑、邻域、内部与闭包 33
4.2 连续映射与同胚 36
4.3 基、子基与邻域基 38
4.4 拓扑与收敛 41

第五章 紧 Hausdorff 空间（一） **46**
5.1 紧空间 46
5.2 Hausdorff 空间 48
5.2.1 sober 空间 49
5.3 正规性与 Baire 性质 51

第六章 乘积空间与商空间 **55**
6.1 乘积空间 55
6.1.1 紧映射 57
6.2 Tychonoff 乘积定理 58
6.2.1 乘积定理背后的选择原则 61
6.3 商空间 63
6.3.1 商空间何时仍为 Hausdorff 空间 65
6.3.2 曲面的粘合 66

第七章 连通性与道路连通性 **69**

7.1 连通空间 69
7.1.1 连通分支与局部连通性 70
7.1.2 另一种极端：零维空间 71
7.2 道路连通空间 73

第八章 Urysohn 引理与可度量化 **76**
8.1 Urysohn 引理 76
8.1.1 连续函数的插入与延拓 77
8.2 可度量化定理 79
8.2.1 局部有限族 81
8.2.2 可度量化流形 83

第九章 紧 Hausdorff 空间（二） **85**
9.1 超滤 85
9.1.1 收敛与紧性 86
9.1.2 超滤极限的代数结构 87
9.2 Tychonoff 空间 88
9.3 Stone–Čech 紧化 90
9.3.1 紧化之间的序 91
9.3.2 离散空间与其超滤 92
9.4 局部紧性与最小 Hausdorff 紧化 93
9.4.1 核紧性 95
9.5 拓扑完备性 96
9.5.1 紧化中的完备性 97
9.5.2 拓扑性质的比较 99

第十章 函数空间 **100**
10.1 紧收敛拓扑与 Stone–Weierstrass 定理 100
10.1.1 从代数结构到一致逼近 101
10.2 紧开拓扑 103
10.2.1 将开集看作函数 103
10.2.2 函数空间的分离性 104
10.3 Isbell 拓扑与可指数化空间 105
10.3.1 Scott 拓扑与 Isbell 拓扑 106
10.3.2 核紧性为何必要 108

常用条件与结论速查 **110**

记号约定

未另作说明时，子集取子空间拓扑，乘积取乘积拓扑，商集取商拓扑。常用记号如下；涉及具体构造的记号在首次使用处定义。欧氏空间的维数符号 M, N 默认取正整数；若讨论 0 维，$\mathbb{R}^0$ 是单点空间，相应的基本拓扑性质可直接检查。

记号	含义
$\mathbb{N}$、$\mathbb{Z}$、$\mathbb{Q}$、$\mathbb{R}$	自然数集 $\mathbb{N}=\{0,1,2,\dots\}$、整数集、有理数集及实数集。
$\mathcal{P}(X)$	X 的幂集，即全体子集组成的集合。
$\mathcal{O}(X)$、$\mathcal{N}(x)$	X 的开集族、点 x 的邻域系；邻域不必是开集。
$\mathcal{B}$、$\mathcal{U}$、$\mathcal{F}$	通常分别表示基、覆盖与滤子，具体含义依上下文确定。
A°、$\overline{A}$、∂A	A 的内部、闭包与边界，$\partial A=\overline{A}\setminus A^\circ$。需要区分母空间时加下标，如 $\mathrm{cl}_Y A$。
$B_d(x,r)$	度量 d 下以 x 为中心、半径为 $r>0$ 的开球；度量明确时写为 $B(x,r)$。
1_X、id_X	X 上的恒等映射；复合 $g\circ f$ 表示先作 f 再作 g，也简记为 gf。
$f^{-1}(B)$	集合 B 的逆像，不要求 f 可逆。只有将 f^{-1} 作为映射使用时，才要求 f 为双射。
$\mathsf{U}(X)$、$\uparrow x$	X 上的全体超滤，以及点 x 生成的主超滤。
$\lim\mathcal{F}$、$\mathrm{adh}\,\mathcal{F}$	滤子 $\mathcal{F}$ 的极限集与聚点集；前者不一定只有一个点。
$[X,Y]$、$C(X)$	全体连续映射 $X\to Y$，以及全体连续实函数 $X\to\mathbb{R}$；所取函数空间拓扑另行说明。
$C^*(X)$	X 上的有界连续实函数全体。
αX、βX	单点紧化与 Stone–Čech 紧化，分别在第 9.4、9.3 节的条件下使用。

紧性不预设 Hausdorff 性。正则性、正规性及完全正则性也不预设 T_1；正则 T_0 空间称为 T_3 空间，正规 T_1 空间称为 T_4 空间，完全正则 T_0 空间称为 Tychonoff 空间。

与教材一致，连通空间和道路连通空间要求非空。拓扑流形要求 Hausdorff 且局部欧氏，第二可数性只在明确说明时加入。紧生成的 Hausdorff 空间称为 k-空间。

关系 $C\ll U$ 按定义 9.4.4 的覆盖条件理解，不表示 $\overline{C}$ 必为紧集。固定母集 X 后，空集族的交为 X。全文使用选择公理；它与乘积紧性的关系见第 6.2.1 小节。

第一章

集合、映射与实数

在分析中，我们借助数与距离讨论极限、连续性。本书希望把这些问题推广到更一般的空间，但在这样做之前，需要先分清论证中用了哪些事实：哪些只是集合与映射的性质，哪些依赖实数的完备性，哪些又依赖能否把所需对象排成一个序列。

本章围绕这三件事准备语言和工具。集合运算将用于处理开集族，逆像将用于描述连续性；上确界与闭区间套让逐步逼近确实得到一个点；可数性则帮助我们判断，什么时候能够用一列对象完成这样的逼近。

1.1 集合、映射与关系

后面我们不仅要研究一个集合 X 中的点，还要指定哪些子集是开集。因此需要区分三个层次：$x \in X$ 是一个点，$A \subseteq X$ 是点的集合，而一族这样的 A 又构成 $\mathcal{P}(X)$ 的子集。这里

$$\mathcal{P}(X) = \{A : A \subseteq X\}$$

称为 X 的幂集。特别地，$\varnothing$ 没有元素，$\{\varnothing\}$ 则有一个元素，二者不同。

写“满足某个条件的所有对象”时，还要确认这些对象属于一个已经给定的集合。对既定的 X，性质 P 可以确定子集 $\{x \in X : P(x)\}$；但不能不加限制地将所有满足 P 的对象组成集合。例如，若 $R = \{x : x \notin x\}$ 是集合，询问 R 是否属于自身，就得到 $R \in R \iff R \notin R$。问题不在某一步计算，而在一开始就允许了这样的集合。

对集族 $\{A_j\}_{j\in J}$，点属于其并，表示它至少属于某个 A_j；属于其交，则表示它属于每个 A_j。以后遇到任意并与任意交，都可以回到这两个量词来判断。空集族的并是 $\varnothing$；若已经固定母集 X，空集族的交规定为 X，因为其中没有一个条件会排除 X 中的点。未指定母集时，我们只讨论非空集族的交。

由这些元素判定条件可以得到集合运算的基本规则。以后我们会反复用它们把关于开集的命题转化为关于闭集的命题。

命题 1.1.1 (集合运算)**.** 对非空指标集 J，有

$$A \cap \bigcup_j B_j = \bigcup_j (A \cap B_j), \quad A \cup \bigcap_j B_j = \bigcap_j (A \cup B_j),$$
$$X \setminus \bigcup_j B_j = \bigcap_j (X \setminus B_j), \quad X \setminus \bigcap_j B_j = \bigcup_j (X \setminus B_j),$$
$$X \times \bigcup_j B_j = \bigcup_j (X \times B_j), \quad X \times \bigcap_j B_j = \bigcap_j (X \times B_j).$$

证明. 例如，$x \in A \cap \bigcup_j B_j$ 表示 $x \in A$，且对某个 j 有 $x \in B_j$，这恰好等价于 $x \in \bigcup_j (A \cap B_j)$。对第二个等式，若 $x \in A$，它自动属于右侧每个 $A \cup B_j$；若 $x \notin A$，则两边都要求 x 属于每个 B_j。

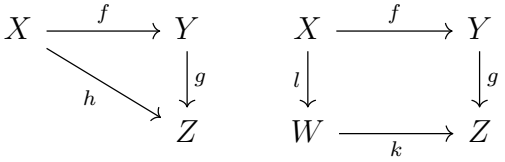
取补集相当于否定元素条件：“不存在一个 j 使 $x \in B_j$” 就是 “对每个 j，$x \notin B_j$”，由此得到第三个等式；将 “每个” 否定成 “至少一个”，得到第四个等式。最后两个等式则对有序对 (x, y) 使用相同判断：第一坐标属于 X，第二坐标分别属于某个或每个 B_j。 □

有了集合，我们还需要比较不同集合中的点。映射 $f : X \to Y$ 指定定义域 X、陪域 Y，并给每个 $x \in X$ 指定唯一的值 $f(x) \in Y$。实际取到的值组成像 $f(X)$，它未必是整个陪域：例如 $x \mapsto x^2$ 作为 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的映射，其像是 $[0, \infty)$。

若还给定 $g : Y \to Z$，就可以先用 f，再用 g，得到 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$。注意复合式中右边的映射先作用；中间的集合 Y 保证 $f(x)$ 是 g 能够接受的输入。恒等映射记为 $1_X : x \mapsto x$。直接代入定义可得

$$f \circ 1_X = 1_Y \circ f = f, \qquad h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

我们用交换图记录复合映射的相等关系：从同一起点到同一终点的任意两条有向路径，其对应的复合映射相同。例如，下列两图分别表示 $h = g \circ f$ 和 $g \circ f = k \circ l$。



(1.1.1)

图 1.1.1 的三角形把直接从 X 到 Z 的 h 与途经 Y 的复合比较，四边形则比较途经 Y 和途经 W 的两条路径。交换性说的是最终输出相同，并不要求各箭头可逆。

如果希望 f 只是给元素换一个名称，我们还要排除两种情况：两个不同的输入被合成同一个输出，或者陪域中有元素没有被取到。这分别对应下面的单射性与满射性。

定义 1.1.2 (单射、满射与双射). 若映射 $f : X \to Y$ 满足由 $f(x) = f(x')$ 可推出 $x = x'$，则称它是*单射*；若每个 $y \in Y$ 都能写成某个 $x \in X$ 的像 $f(x)$，则称它是*满射*；同时为单射和满射的映射称为*双射*。

这两个条件同时成立，恰好保证映射可以反向进行。

定理 1.1.3 (逆映射). 映射 $f : X \to Y$ 是双射，当且仅当存在映射 $g : Y \to X$，使 $g \circ f = 1_X$ 且 $f \circ g = 1_Y$。这样的 g 唯一，记为 f^{-1}。

证明. 若 f 为双射，满射性保证对每个 $y \in Y$ 可以找到原像，单射性保证这一原像唯一。令 $g(y)$ 等于这个原像，就得到了定义在整个 Y 上的映射。于是 $f(g(y)) = y$；对 $x \in X$，$f(x)$ 的唯一原像正是 x，所以 $g(f(x)) = x$。

反过来，若存在这样的 g，则由 $f(x) = f(x')$ 可得

$$x = g(f(x)) = g(f(x')) = x',$$

而 $y = f(g(y))$ 给出了每个 y 的原像。因此 f 是双射。最后，若 g, h 都是逆映射，则

$$g = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = h,$$

所以逆映射唯一。 □

接下来不必要求 f 可逆。给定输出端的一个集合 $B \subseteq Y$，我们仍然可以询问：哪些输入被映入了 B？这些输入组成

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\},$$

称为 B 的逆像。例如对平方映射，$f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\}$，尽管平方映射没有逆映射。因此，$f^{-1}(B)$ 中的 f^{-1} 是集合运算记号，并不预先断言存在一个从 Y 到 X 的逆映射。以后用逆像描述连续性时，这一区分始终有效。

命题 1.1.4 (像与逆像)**.** 对 $A \subseteq X$ 和 $B \subseteq Y$，有

$$f(A) \subseteq B \iff A \subseteq f^{-1}(B), \qquad A \subseteq f^{-1}(f(A)), \quad f(f^{-1}(B)) \subseteq B.$$

像与逆像运算都保持包含关系，并且

$$\begin{aligned} f\Big(\bigcup_j A_j\Big) &= \bigcup_j f(A_j), \\ f^{-1}\Big(\bigcup_j B_j\Big) &= \bigcup_j f^{-1}(B_j), \\ f^{-1}\Big(\bigcap_j B_j\Big) &= \bigcap_j f^{-1}(B_j), \\ f^{-1}(Y \setminus B) &= X \setminus f^{-1}(B). \end{aligned}$$

证明. 第一个等价关系的两边都表示：对每个 $a \in A$，有 $f(a) \in B$。分别取 $B = f(A)$ 和 $A = f^{-1}(B)$，便得到后面的包含关系。若 $A \subseteq A'$，则 A 中点的像也都是 A' 中点的像；若 $B \subseteq B'$，则满足 $f(x) \in B$ 的点也满足 $f(x) \in B'$，故这两种运算都保持包含。

对并集的像，$y \in f(\bigcup_j A_j)$ 意味着存在某个 $x \in A_j$ 使 $y = f(x)$，这等价于 $y \in f(A_j)$ 对至少一个指标成立。逆像的等式更加直接：例如

$$x \in f^{-1}\Big(\bigcap_j B_j\Big) \iff \text{对每个} j,\ f(x) \in B_j \iff x \in \bigcap_j f^{-1}(B_j).$$

将“对每个”换成“对某个”，得到并的公式；对条件 $f(x) \in B$ 取否定，得到补集的公式。 □

这里值得注意，像的公式只写了并，没有把交和补集照搬过去。仍以平方映射为例，取 $A = \{1\}$、$A' = \{-1\}$，则 $f(A \cap A') = \varnothing$，而 $f(A) \cap f(A') = \{1\}$。两个像相交，并不意味着得到同一输出的输入也相同；逆像始终是在检查同一个输入 x，所以没有这一困难。这也是我们以后用逆像来定义连续性的一个原因。

限制映射 $f|_A : A \to Y$ 限制的是定义域，映射 $f^\circ : X \to f(X)$ 限制的则是陪域。前者减少允许的输入，后者保持每个输入的值而去掉未被取到的输出，因而 f° 总是满射。

接下来暂时放宽“每个输入恰有一个输出”的要求。像 $x \le y$ 这样的关系，同一个 x 可以与多个 y 发生关系；等价关系也有这一特点。将所有发生关系的有序对收集起来，就得到统一的集合描述。

定义 1.1.5 (关系)**.** 从 X 到 Y 的关系是子集 $R \subseteq X \times Y$。其逆关系为 $R^{\mathrm{op}} = \{(y,x) : (x,y) \in R\}$。对 $S \subseteq Y \times Z$，定义

$$S \circ R = \{(x,z) : \text{存在} y \in Y \text{ 使} xRy \text{ 且} ySz\}.$$

恒等关系为 $\mathrm{id}_X = \{(x,x) : x \in X\}$。

关系 $R \subseteq X \times Y$ 是某个映射的图像 $f_* = \{(x, f(x)) : x \in X\}$，当且仅当每个 x 都恰与一个 y 发生关系。关系的复合满足

$$\mathrm{id}_Y \circ R = R = R \circ \mathrm{id}_X, \quad T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R, \quad (S \circ R)^{\mathrm{op}} = R^{\mathrm{op}} \circ S^{\mathrm{op}}.$$

结合律两边都表示存在 y, z，使 xRy、ySz 和 zTw 同时成立，所以括号只改变检查这些条件的先后，并不改变结果。恒等关系要求前后两个点相同，因而插入它不改变关系。将一条复合关系反向读取时，先反向经过 S，再反向经过 R，这解释了最后一式中次序的颠倒。把关系取成映射的图像，就回到了前面的映射复合。

最后，空集也包含在这些约定中。从 $\varnothing$ 到任意集合都有唯一的映射，因为没有输入需要指定输出；从非空集合到 $\varnothing$ 则不存在映射，因为任取一个输入都无法找到输出。

1.2 实数公理

集合与映射的语言不会区分 $\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{R}$ 中的“空隙”。但在分析中，逐步逼近所产生的极限必须实际存在：例如将满足 $x^2 \le 2$ 的非负有理数越取越大，候选的终点并不在 $\mathbb{Q}$ 中。我们需要一个超出四则运算的条件，保证这样的逼近不会走出所研究的数系。

实数构成一个完备有序域。这里“有序”表示域运算与全序相容：$a \le b$ 时有 $a + c \le b + c$，非负数的积仍非负；“完备”则是说，每个非空有上界的子集 $A \subseteq \mathbb{R}$ 都有最小上界，记为 $\sup A$。如果 $s = \sup A$，那么一方面 $a \le s$ 对所有 $a \in A$ 成立，另一方面每个 $\varepsilon > 0$ 都能找到 $a \in A$ 使 $s - \varepsilon < a$。后一条保证 s 没有取得过大，是后面选择逼近点的依据。

对非空有下界集合，相应地下确界满足 $\inf A = -\sup(-A)$，其中 $-A = \{-a : a \in A\}$。全文约定 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$，绝对值记为 $|x| = \max\{x, -x\}$。

先看完备性的一项直接后果。我们希望用 $1/n$ 作为越来越细的刻度，就必须知道自然数可以超过任意给定的实数；否则 $1/n$ 会一直大于某个正数，不能真正逼近零。得到这一点后，把实数放进相邻整数之间，再缩放刻度，就能在任意两个不同实数之间放入一个有理数。

命题 1.2.1 (阿基米德性与有理数的稠密性)**.** 对每个 $x \in \mathbb{R}$，存在 $n \in \mathbb{N}$ 使 $x < n$。$\mathbb{N}$ 的每个非空子集都有最小元。每个 $x \in \mathbb{R}$ 都有唯一的整数 $[x]$ 满足 $[x] \le x < [x] + 1$，且任意两个不同实数之间都存在有理数。

证明. 若 $\mathbb{N}$ 有上界，完备性给出 $M = \sup \mathbb{N}$。由于 $M - 1$ 不是上界，存在 $n \in \mathbb{N}$ 使 $M - 1 < n$；但 $n + 1 \in \mathbb{N}$ 且 $M < n + 1$，与 M 是上界矛盾。因此自然数无上界。

自然数的良序性来自归纳法：若非空的 $A \subseteq \mathbb{N}$ 没有最小元，则 $0 \notin A$；若 $0, \ldots, n-1$ 都不在 A，n 也不能在 A，否则它就是最小元。归纳可知 A 为空，矛盾。

现在选取正整数 $M > |x|$。在 $-M, \dots, M$ 中，至少有 $-M \le x$；取其中不超过 x 的最大整数 k，就有 $k \le x < k+1$。若另一个整数也满足这一条件，两个整数之差至少为一将导致矛盾，因此 $[x] = k$ 唯一。

最后给定 $a < b$，取正整数 n 使 $1/n < b - a$。我们把 a 向右移到刻度为 $1/n$ 的下一个格点，即令 $m = [na] + 1$。于是

$$a < \frac{m}{n} \le a + \frac{1}{n} < b.$$

这就构造出了所需的有理数，而不仅仅说明它存在。 □

现在回到本节开始的平方根问题。我们不预先使用平方根函数的连续性，而把所有平方不超过 2 的非负实数放在一起，考察它们的最小上界。需要检查的是：这个上界既不可能平方偏小，也不可能平方偏大。

命题 1.2.2 (2 的正平方根)**.** 存在唯一的正实数 b 满足 $b^2 = 2$。

证明. 令 $A = \{x \ge 0 : x^2 \le 2\}$。由于 $1 \in A$，且 2 是 A 的上界，$b = \sup A$ 存在并满足 $1 \le b \le 2$。

若 $b^2 < 2$，我们试着把 b 向右移动一个小量 δ。由

$$(b+\delta)^2 = b^2 + 2b\delta + \delta^2 \le b^2 + (2b+1)\delta \qquad (0 < \delta < 1),$$

只要再令 $(2b+1)\delta < 2 - b^2$，就有 $b + \delta \in A$，与 b 是上界矛盾。

若 $b^2 > 2$，则应向左移动。取 $0 < \delta < b$ 且 $2b\delta < b^2 - 2$，得到

$$(b-\delta)^2 = b^2 - 2b\delta + \delta^2 > 2.$$

在非负数上，平方随数值严格递增，所以每个 $x \in A$ 都满足 $x < b - \delta$。这说明比 b 小的 $b - \delta$ 已经是上界，与最小性矛盾。因此 $b^2 = 2$。平方的严格递增性同时给出正根的唯一性。 □

前面用完备性补出了一个具体的数。更一般地，若把实直线分成左、右两部分，且左边每个数都小于右边每个数，我们希望两部分之间也不会留下一个缺失的分界位置。取左半部分的上确界，正好能够找到这个位置。

命题 1.2.3 (戴德金完备性)**.** 设 A, B 非空，$A \cup B = \mathbb{R}$，并且对任意 $a \in A, b \in B$ 都有 $a < b$。则存在 $c \in \mathbb{R}$，使得或者 $A = (-\infty, c)$、$B = [c, \infty)$，或者 $A = (-\infty, c]$、$B = (c, \infty)$。

证明. 任取 $b \in B$，它是 A 的上界，因此 $c = \sup A$ 存在。若 $x < c$ 却不在 A，则 $x \in B$，从而所有 $a \in A$ 都小于 x，这与 c 是最小上界矛盾。所以 $(-\infty, c) \subseteq A$。若 $x > c$，它不可能属于 A，故 $(c, \infty) \subseteq B$。

假设还保证 $A \cap B = \varnothing$，因为公共点会满足 $x < x$。于是只剩下 c 本身属于哪一部分的问题：$c \in A$ 给出第二种情形，$c \in B$ 给出第一种情形。 □

接下来把“越来越接近”写成序列的语言。若对每个 $\varepsilon > 0$，都存在 N，使 $n \ge N$ 时有 $|x_n - a| < \varepsilon$，就称序列 (x_n) 收敛到 a，记作 $x_n \to a$。这里“最终落在”强调的是从某一项起所有项都落在 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 中，而不只是有无穷多项落在其中。

极限必唯一：若 $a \neq b$ 都是极限，取 $\varepsilon = |a-b|/3$，则以 a, b 为中心、半径为 ε 的两个区间不相交，但充分靠后的 x_n 又应同时位于二者之中，矛盾。由阿基米德性可得

$$\frac{1}{n} \longrightarrow 0, \qquad 0 \leq x - \frac{[nx]}{n} < \frac{1}{n} \quad (n \geq 1),$$

所以 $[nx]/n \to x$，每个实数都是有理数序列的极限。前面有理数的稠密性说任意小区间里都能找到有理数，这里则把这些近似依次排成了一列。

我们还会用另一种逐步逼近：先把目标限制在一个闭区间中，再不断缩小允许的区间。每一步都能选出非空区间，还不足以在任意数系中保证最后有公共点；在 $\mathbb{R}$ 中，完备性正是保证这一点的条件。若区间的长度同时趋于零，就不会留下两个不同的候选点。

定理 1.2.4 (闭区间套定理)**.** 若 $[a_0, b_0] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq \cdots$ 是非空有界闭区间套，则其交非空。若另有 $b_n - a_n \to 0$，则其交恰为一个点。

证明. 由于区间嵌套，左端点不能向左移动，右端点不能向右移动。我们希望找到一个点，它不小于每个左端点，又不大于每个右端点；因此取

$$c = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

这组左端点非空且被 b_0 所界，所以上确界存在。固定 n：若 $m \leq n$，则 $a_m \leq a_n \leq b_n$；若 $m \geq n$，则 $a_m \leq b_m \leq b_n$。因此 b_n 是所有左端点的上界，从而 $a_n \leq c \leq b_n$。这对每个 n 都成立，故 c 在所有区间中。

若 d 也是公共点，则对每个 n 有 $|c-d| \leq b_n - a_n$。当右端趋于零时，只能有 $c = d$；不要求长度趋于零时，公共部分可以仍是一个非退化区间。 □

1.3 可数集

上一节用一列有理数逼近任意实数，也用一列嵌套区间确定一个点。这些论证都有同一个特点：所需操作可以依次排成第零步、第一步、第二步，因而能用自然数编号。以后研究邻域时，我们也会问，是否只需依次检查一列邻域，就能代替检查所有邻域。

这就需要区分两类无限集：有些可以逐个列出，有些则无论怎样列总会漏掉元素。比较集合大小时，我们不关心元素本身是什么，而关心能否把它们一一配对。

定义 1.3.1 (等势与可数集)**.** 若集合 X, Y 之间存在双射，则称它们等势。空集或与某个 $n \geq 1$ 对应的集合 $\{0, \ldots, n-1\}$ 等势的集合称为*有限集*；与 $\mathbb{N}$ 等势的集合称为*可数无限集*。有限集与可数无限集统称为*可数集*。

对非空集合，把元素逐个列出并允许重复，是判定可数性的一个方便方法。

定理 1.3.2 (可数性的单射与满射判定)**.** 对非空集合 X，下列条件等价：X 可数；存在单射 $X \to \mathbb{N}$；存在满射 $\mathbb{N} \to X$。

证明. 若 X 非空且可数，它可以单射到 $\mathbb{N}$，也可以列成覆盖全部元素的序列：X 无限时使用定义中的双射，X 有限时先列完所有元素，再重复其中一个。因此存在满射 $\mathbb{N} \to X$。

反过来，设 $j : X \to \mathbb{N}$ 是单射。X 与 $j(X)$ 等势，所以只需说明自然数的子集可数。如果 $j(X)$ 无限，就每次选尚未列出的最小元素。这个过程不会终止，而且不会永远跳

过某个 $m \in j(X)$，因为 m 前面只有有限个自然数。于是它给出 $j(X)$ 的枚举，证明了 X 可数；有限情形直接成立。

最后，若已知满射 $g : \mathbb{N} \to X$，同一个元素可能出现多次，但可以给它指定第一次出现的位置：

$$x \longmapsto \min\{n \in \mathbb{N} : g(n) = x\}.$$

满射性和自然数的良序性保证这个位置存在，不同元素的首次位置又不相同，故这是一条到 $\mathbb{N}$ 的单射。 □

具体构造时，很少直接猜一个复杂集合到 $\mathbb{N}$ 的双射。更方便的办法是先用有限串自然数给对象编码，再把这些编码列成一列。比如一个有理数由整数分子与正整数分母确定，一个多项式由有限多个系数确定。下面的规则把这些操作统一起来；后面构造拓扑基也会反复用到它们。

命题 1.3.3 (可数集的基本运算)**.** 可数集的子集与映射像仍可数。有限个可数集的积可数，可数个可数集的并也可数。特别地，$\mathbb{Q}$、一个可数集的全体有限子集，以及全体实代数数都是可数集。

证明. 可数集的子集仍能使用原来的自然数编号，所以可数。若 X 非空可数，取一个列出全部元素的序列 $x_0, x_1, \ldots$，则 $f(x_0), f(x_1), \ldots$ 列出了 $f(X)$；空集情形直接成立。

对积，我们先给二元组编码。由素因数分解的唯一性，$(m, n) \mapsto 2^m 3^n$ 将 $\mathbb{N}^2$ 单射到 $\mathbb{N}$；再逐次合并坐标，就得到有限积的结论。对可数并 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$，选取单射 $j_n : X_n \to \mathbb{N}$，再把 x 编成 $(n, j_n(x))$，其中 n 是使 $x \in X_n$ 的最小指标。第一坐标指明使用哪个集合的编号，第二坐标在该集合内区分元素，因此这确实是单射。这里对所有 n 同时选取 j_n，使用了可数个可数集的通常选择原则。

整数可按 $0, 1, -1, 2, -2, \ldots$ 列出。将有理数唯一写成分母为正的既约分数，便把 $\mathbb{Q}$ 单射到 $\mathbb{Z} \times \{1, 2, \ldots\}$。对一个可数集 X，每个有限子集都能由某个有限元组 $(x_1, \ldots, x_k)$ 得到；连同空元组给出的空集，全体有限子集是 $\bigcup_{k\geq 0} X^k$ 的像，所以可数。

同样地，有理系数多项式由有限串有理数确定，因此只有可数个。每个非零多项式只有有限个实根，全体实代数数就是这些有限根集的可数并，因而可数。 □

有理数虽然在实直线上稠密，却仍可以逐个列出；这说明“每个小区间都能遇到它”不等于“和实数一样多”。现在给定任意实数序列，我们反过来利用逐步选择：第 n 步避开第 n 项，同时把可能的位置限制在一个更小的闭区间中。完备性将保证，避开全部项的要求最后由一个真实的点实现。

定理 1.3.4 (Cantor)**.** $\mathbb{R}$ 不可数。更一般地，对任意集合 X，不存在满射 $X \to \mathcal{P}(X)$。

证明. 给定 $[0, 1]$ 中的序列 $x_0, x_1, \ldots$。先置 $I_{-1} = [0, 1]$；已选出非退化闭区间 I_{n-1} 后，可以在其中找到一个避开 x_n 的非退化小闭区间 I_n，并使其长度不超过 2^{-n}。这样的选择总能进行，因为从一个非退化区间去掉一点后，至少还有一段非空开区间。

由定理 1.2.4，$\bigcap_{n\geq 0} I_n$ 中存在点 x。对每个 n，$x \in I_n$ 而 $x_n \notin I_n$，所以 x 不等于序列中的任何一项。由定理 1.3.2，$[0, 1]$ 不可数；其超集 $\mathbb{R}$ 也不可数。

一般结论使用同样的“逐项造成不同”的思想。给定 $f : X \to \mathcal{P}(X)$，我们构造一个子集 A，使它在元素 x 处与 $f(x)$ 恰好作出相反的选择：

$$A = \{x \in X : x \notin f(x)\}.$$

若 $A = f(a)$，在 a 处就有 $a \in A \iff a \notin A$，矛盾。因而 A 不属于 f 的像，f 不可能满射。这里 A 从已知的集合 X 中选出，不涉及本章开头那种不受限制的集合构造。 □

证明两个集合等势时，双射未必容易直接写出；但一个方向的单射往往只需给对象找到一种编码。如果两个方向都能编码，我们希望把它们拼成一一对应。困难在于不能任意选一部分用 f、其余用 g^{-1}，否则两个部分可能占用同一个输出。下面沿着 f, g 交替作用的链来划分集合，正是为了避免这种冲突。

定理 1.3.5 (Bernstein–Schröder)**.** 若存在单射 $f : X \to Y$ 和 $g : Y \to X$，则 X, Y 等势。

证明. 先看哪些点不能使用 g^{-1}：恰好是 $A_0 = X \setminus g(Y)$ 中的点。我们只好在这些点上使用 f。但若 $x \in A_0$ 已经占用了 $f(x)$，点 $g(f(x))$ 就不能再使用 g^{-1}，否则也会映到 $f(x)$；所以它也应使用 f。如此继续，令

$$A_{n+1} = g(f(A_n)), \qquad A = \bigcup_{n \geq 0} A_n,$$

再定义

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ g^{-1}(x), & x \notin A. \end{cases}$$

由于 $X \setminus A \subseteq g(Y)$，第二行使用的是单射 $g : Y \to g(Y)$ 的逆映射，因而有定义。

现在核对两部分的输出。对每个 $y \in Y$，有

$$g(y) \in A \quad \iff \quad y \in f(A).$$

从右到左由 $g(f(A_n)) = A_{n+1}$ 得到；从左到右则注意 $g(y) \notin A_0$，所以它属于某个 $A_{n+1} = g(f(A_n))$，再由 g 的单射性得到 $y \in f(A_n)$。于是

$$g^{-1}(X \setminus A) = Y \setminus f(A).$$

两部分的像恰好互不相交并覆盖 Y，而 $f|_A$ 与 $g^{-1}|_{X \setminus A}$ 各自都是到相应像的双射。因此 h 是双射。 □

图 1.3.1 给出上述链的开头，箭头明确标出所用的映射，因而不会混淆应使用哪个逆映射：

$$x_0 \xrightarrow{f} y_0 \xrightarrow{g} x_1 \xrightarrow{f} y_1 \xrightarrow{g} \cdots \tag{1.3.1}$$

其余分支可能是圈、双向无限链，或从 $Y \setminus f(X)$ 出发的链。h 的定义统一处理了这些情形。

有了双向单射判定，我们可以比较 $\mathbb{R}$ 与自然数的幂集。子集 $A \subseteq \mathbb{N}$ 相当于一串“选或不选”的决定；把这些决定写成实数的数位，就能将 A 编成实数。不过直接使用二进

制会碰到 $0.1000\cdots = 0.0111\cdots$ 这样的重复表示。改用三进制的 $0, 2$ 两个数位，就能使首次不同的数位压过全部后续数位，避免这一冲突。

反过来，一个实数由它左边的全部有理数唯一确定。将这两种编码分别写出来，就无需猜一个直接的双射。

定理 1.3.6 (连续统与自然数幂集)**.** $\mathbb{R}$ 与 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 等势。

证明. 对 $A \subseteq \mathbb{N}$，定义

$$u(A) = \sum_{n \in A} \frac{2}{3^{n+1}}.$$

部分和递增且不超过 1，所以由实数完备性收敛，u 有定义。若 A, B 首次在指标 k 处不同，不妨设 $k \in A \setminus B$，则

$$u(A) - u(B) \geq \frac{2}{3^{k+1}} - \sum_{n>k} \frac{2}{3^{n+1}} = \frac{1}{3^{k+1}} > 0.$$

所以 $u : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ 是单射。注意这里允许的数位只有 $0, 2$；通常三进制展开的另一种表示若含有数位 1，并不属于这组编码。

反过来，令 $v(x) = \{q \in \mathbb{Q} : q < x\}$。若 $x < y$，由有理数的稠密性可取 $x < q < y$，则 $q \in v(y)$ 而 $q \notin v(x)$，因此 $v : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ 是单射。选一个双射 $e : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$，则 $B \mapsto e^{-1}(B)$ 给出 $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ 与 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ 的双射。应用定理 1.3.5，得到所需等势关系。 □

用 $|X| \leq |Y|$ 表示存在单射 $X \to Y$，则双向单射定理说明这确实符合“大小相等”的含义。映射 $x \mapsto \{x\}$ 将 X 单射到 $\mathcal{P}(X)$，而 Cantor 定理排除了二者等势，故

$$|X| < |\mathcal{P}(X)|, \qquad |\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|.$$

本笔记沿用记号 $\omega = |\mathbb{N}|$、$\mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$。连续统假设断言：不存在严格介于二者之间的基数。[1]

[1]若 ZFC 相容，则连续统假设独立于 ZFC。这里仅保留这一历史背景，后文不使用这个独立性结果，也不在本书中证明它。

第二章

实直线与平面的拓扑

我们先在熟悉的实直线和平面上观察拓扑问题。一个集合是否包含趋近它的点，一段连续变化能否越过某个值而不取到它，一个有界点列能否总避开所有极限，这些问题分别把我们引向闭集、连通性与紧性。

本章仍然使用实数和欧氏距离，以便看清每个概念的来路。到最后，我们还会遇到一条填满正方形的连续曲线：这提醒我们，连续映射可以把不同的点重合起来；若要表达两个空间真正具有相同的拓扑性质，需要进一步要求它是同胚。

2.1 实直线的拓扑

先考虑 $(0,1)$ 与 $[0,1]$ 的差别。序列 $1/(n+2)$ 的每一项都在 $(0,1)$ 中，极限 0 却不在其中；对 $[0,1]$，这样的极限不会走出集合。我们希望先用序列描述这种区别，再把它改写为点附近小区间的性质。后一种描述不需要先谈序列，将是以后定义一般拓扑的出发点。

定义 2.1.1 (实直线上的闭集、开集与邻近点). 若 $F \subseteq \mathbb{R}$ 中每个收敛序列的极限仍属于 F，则称 F 为闭集；补集为闭集的集合称为开集。包含以 x 为中心的某个开区间的集合，称为 x 的一个邻域。若 x 的每个邻域都与 A 相交，则称点 x 是 A 的邻近点。

这里的邻域不必本身就是开区间，也不必是开集；只要它含有点附近的一整段小区间即可。邻近点则允许点本身已经在 A 中，例如常值序列说明每个 $a \in A$ 都应该被计入。我们接下来要验证，这种“任意靠近都能遇到 A”的说法与“能由 A 中的序列逼近”确实相同。

命题 2.1.2 (开集与邻近点的局部判定). 子集 $U \subseteq \mathbb{R}$ 为开集，当且仅当每个 $x \in U$ 都属于某个包含在 U 中的开区间。又，x 是 A 的邻近点，当且仅当存在 A 中的序列收敛到 x。因此，一个集合为闭集，当且仅当它包含自身的全部邻近点。

证明. 若 U 开，但某个 $x \in U$ 附近没有小开区间包含于 U，就可以对每个 $n \geq 0$ 选取

$$x_n \in \left(x - \frac{1}{n+1}, x + \frac{1}{n+1}\right) \setminus U.$$

于是 $x_n \to x$，而所有 x_n 都在闭集 $\mathbb{R} \setminus U$ 中，矛盾。这个构造说明：局部条件失败时，可以把失败的位置逐次选成一个收敛序列。

反过来，假设 U 的每个点附近都有小开区间包含于 U。若 $\mathbb{R} \setminus U$ 中的序列收敛到 $x \in U$，它最终就会落入这样一个区间，矛盾。因此补集包含其内部序列的全部极限，U 是开集。

若 x 是 A 的邻近点，则每个上述小区间都与 A 相交；从中选取 a_n，便有 $a_n \to x$。反之，若 $a_n \in A$ 且 $a_n \to x$，那么 x 的任意邻域包含一个以 x 为中心的小开区间，序列最终落入其中，所以邻域与 A 相交。结合闭集的定义，就得到最后的刻画。 □

因此，$x_n \to x$ 也可以表述为：序列最终落在 x 的每个邻域中。取子列不会改变“最终”这一性质，所以每个子列也收敛到 x。

我们再检查这些集合在运算下的表现。若序列的项都属于一族闭集的交，其极限就属于其中每个闭集，因而属于交。若序列的项位于有限个闭集的并中，至少有一个闭集包含其中无穷多项；按递增指标取出这个子列，它与原序列极限相同，于是极限属于该闭集，也属于并。这证明了任意闭交与有限闭并仍闭。取补集并使用命题 1.1.1，可知任意开并与有限开交仍开。

$\varnothing$ 和 $\mathbb{R}$ 都既开又闭，因此“开”与“闭”并不互斥；它们也不穷尽所有集合，例如 $[0,1)$ 既不开也不闭。上面的“有限”不能随意去掉：

$$\bigcap_{n\ge 1}(-1/n, 1/n) = \{0\}$$

不是开集。每个区间都容许一定半径，但这些半径可以趋于零，交集便不再留有任何小区间。

有了集合一侧的“接近”，再看映射如何保持它。对 $D, E \subseteq \mathbb{R}$ 与 $a \in D$，称 $f : D \to E$ 在 a 连续，是指给定任意 $\varepsilon > 0$，总能找到 $\delta > 0$，使

$$x \in D, \quad |x - a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

也就是说，先规定输出允许的误差，再限制输入与 a 的距离。若这一条件成立，任何向 a 逼近的序列都应被映成向 $f(a)$ 逼近的序列；反过来，若连续性失败，也应能把失败的输入排成一列。

定理 2.1.3 (连续性的序列判定)**.** 设 $D, E \subseteq \mathbb{R}$。映射 $f : D \to E$ 在 $a \in D$ 连续，当且仅当由 D 中的 $x_n \to a$ 可以推出 $f(x_n) \to f(a)$。

证明. 先设 f 在 a 连续。给定 $\varepsilon > 0$，选连续性对应的 δ；若 $x_n \to a$，则最终 $|x_n - a| < \delta$，从而最终 $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$。这正是 $f(x_n) \to f(a)$。

若 f 不连续，否定量词后得到某个固定的 $\varepsilon_0 > 0$：无论 δ 多小，都能找到 $x \in D$ 使 $|x - a| < \delta$ 而 $|f(x) - f(a)| \ge \varepsilon_0$。逐次取 $\delta = 1/(n+1)$ 并选出这样的 x_n，便有 $x_n \to a$，但像序列始终没有进入以 $f(a)$ 为中心、半径为 ε_0 的区间。因此保持序列极限也保证连续。 □

现在考察区间中从一点走向另一点时会遇到什么。如果把区间中的点染成两种颜色，且两种颜色都出现，我们希望找到一个位置，使任意小的邻域都同时遇到两种颜色。区间没有缺口，正是在这里起作用。

谈到区间 I 的相对闭集时，我们只要求 I 中的极限留在该子集中：$F \subseteq I$ 相对闭，是指 F 中的序列若收敛到 I 中的点，极限仍属于 F。相对开集是它在 I 中的补集；由前面的局部判定，它等价于形如 $I \cap U$ 的集合，其中 U 在 $\mathbb{R}$ 中开。这一区分允许端点在整个实直线上不是内点，却仍有相对于区间的邻域。

定理 2.1.4 (区间与介值性)**.** 若区间 I 是两个非空子集 A, B 的并，则 I 中有一点同时是二者的邻近点。特别地，I 不能分成两个不相交的非空相对闭集。连续映射 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 取得 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的每个值；每个连续映射 $f : [a, b] \to [a, b]$ 都有不动点。

证明. 若 $A \cap B \neq \varnothing$，交集中的点已经满足要求。否则选 $a \in A, b \in B$，必要时交换两集合的名称，使 $a < b$。由于 I 是区间，$[a, b] \subseteq I$。我们从左边的 A 出发，取它在这段区间中能够达到的最右位置

$$c = \sup(A \cap [a, b]).$$

上确界的逼近性质保证 c 是 A 的邻近点。若 $c < b$，则 $(c, b]$ 中不可能再有 A 的点，因此全属于 B，从右边趋近 c 就证明它也是 B 的邻近点；若 $c = b$，则 $b \in B$ 已经给出这一点。故共同邻近点始终属于 I。若 A, B 还相对闭，它们就都必须包含 c，所以不可能是不相交的非空分割。

对介值性，不妨设 $f(a) < p < f(b)$ 并假设 f 取不到 p。令

$$A = \{x \in [a, b] : f(x) < p\}, \qquad B = \{x \in [a, b] : f(x) > p\}.$$

它们非空、不相交且并为 $[a, b]$。若 $x_n \in A$ 收敛到 $x \in [a, b]$，连续性给出 $f(x) \leq p$；又因 p 不在像中，实际有 $f(x) < p$，故 A 相对闭。同理 B 相对闭，与刚才的结论矛盾。另一种等价的读法是：分别从 A, B 取序列趋近它们的公共邻近点 c，由定理 2.1.3 同时得到 $f(c) \leq p$ 与 $f(c) \geq p$，所以 $f(c) = p$。

最后，若 $f : [a, b] \to [a, b]$ 连续，令 $g(x) = f(x) - x$，则 $g(a) \geq 0$、$g(b) \leq 0$。端点取零时已得不动点，否则介值性给出 $g(c) = 0$，也就是 $f(c) = c$。 □

区间的完整性还会控制点列。有界序列未必自身收敛，例如 $(-1)^n$ 来回跳动；但它不能把所有项都分散到互不接近的位置。我们可以每次只保留含有无穷多项的半区间，再在这些越来越小的区间里按顺序挑点。这样既能让所选点靠近同一个位置，又能保证得到的确实是子列。

定理 2.1.5 (Bolzano–Weierstrass)**.** 有界闭区间中的每个序列，都有一个子列收敛到该区间中的点。

证明. 若区间退化成一个点，结论直接成立。否则将它二等分；若两个闭半区间都只含序列的有限多项，整个区间就只含有限多项，所以至少一个半区间含有无穷多项。保留它并重复操作，得到嵌套闭区间 I_k，其长度不超过原区间长度的 2^{-k} 倍。

由于每个 I_k 都含有无穷多项，在已经选定 n_{k-1} 后，仍能找到 $n_k > n_{k-1}$ 使 $x_{n_k} \in I_k$。由定理 1.2.4，这些区间有唯一公共点 x，且

$$|x_{n_k} - x| \leq \text{length}(I_k) \longrightarrow 0.$$

因此所得子列收敛到原闭区间中的点。 □

若 K 中每个序列都有子列收敛到 K 中的点，就称 K 序列紧。这里“极限在 K 中”不可省略，例如 $(0, 1)$ 中的 $1/(n + 2)$ 虽然在实直线上有极限，却不能在 $(0, 1)$ 中找到收敛子列的极限。

还可以不先选子列，而直接描述它可能趋向的位置。若对任意 N，都存在 $n \geq N$ 满足 $x_n \in U$，称序列*经常落在* U 中；若它经常落在点 x 的每个邻域中，就称 x 为序列的*聚点*。这里不要求最终所有项都在邻域里，只要求无论扔掉多少前项，仍有后面的项进入它。

在 $\mathbb{R}$ 中，聚点恰好是子列的极限。确实，若 x 是聚点，可依次在 $(x-1/(k+1), x+1/(k+1))$ 中选择指标严格递增的项，所得子列趋于 x；反过来，一个趋于 x 的子列保证原序列经常落在 x 的每个邻域中。极限一定是聚点，但 $(-1)^n$ 有聚点 $-1, 1$，却没有极限。

我们已经用点列描述了有界闭集的性质。现在换一个看法：用很多开区间把集合盖住，能否只留下有限个区间仍盖住全部点？这里一族集合的*覆盖*是指它们的并包含所研究的集合，*有限子覆盖*则要求从原来那一族中选取有限个，不能另外换成更大的区间。

这个要求把“每个点附近可以做一件事”变成了“只需有限处就能完成”。下面证明它在实直线上与序列紧性相同；以后即使序列不再足以描述整个空间，开覆盖仍能用于定义紧性。

定理 2.1.6 (实直线上的 Heine–Borel 定理)**.** 对 $K \subseteq \mathbb{R}$，下列条件等价：

1. K 有界且闭；
2. K 中的每个序列在 K 中都有聚点；
3. K 序列紧；
4. K 的每个开区间覆盖都有有限子覆盖。

证明. 空集满足全部条件，以下可以设 $K \neq \varnothing$。若 K 有界且闭，定理 2.1.5 给出实直线中的收敛子列，闭性保证极限在 K 中，故 K 序列紧。反过来，若 K 无界，可选 $|x_n| > n$，任何子列仍无界而不可能收敛；若 K 不闭，则有 K 中的序列趋于集合外一点，其任意子列也趋于该点，由极限唯一性，不可能另收敛到 K 中的点。聚点与子列极限的等价性证明了条件 (2) 与 (3) 等价，因而前三个条件等价。

我们先证明闭区间 $[a,b]$ 具有有限子覆盖性质。给定开区间覆盖 $\mathcal{U}$，令

$$S = \{t \in [a,b] : [a,t] \text{ 可由} \mathcal{U} \text{ 中有限个区间覆盖}\}.$$

由于某个覆盖区间含 a，S 非空；令 $c = \sup S$。取 $U \in \mathcal{U}$ 与 $\eta > 0$ 使 $(c-\eta, c+\eta) \subseteq U$。由上确界的逼近性质，可选 $t \in S$ 满足 $t > c - \eta/2$。覆盖 $[a,t]$ 的有限个区间再加上 U，便能覆盖到 $\min\{b, c+\eta/2\}$。若 $c < b$，这将得到比 c 更大的 S 中元素，矛盾。因此 $c = b$；同一有限族还覆盖 $[a,b]$，所以端点也没有遗漏。

任意开集覆盖都可在每个被覆盖点处细化为小开区间覆盖，再将选出的有限小区间各自放回原覆盖成员。因此刚才的结论同样适用于开集覆盖。若 $K \subseteq [a,b]$ 闭，就在 K 的覆盖中补入开集 $\mathbb{R} \setminus K$，得到 $[a,b]$ 的开覆盖；取有限子覆盖后去掉补入的那个集合，剩下的成员仍覆盖 K。这证明了 (1) 推出 (4)。

最后设 (4) 成立。对覆盖 $\{(-n, n) : n \geq 1\}$ 取有限子覆盖，可知 K 有界。若 K 不闭，取其邻近点 $x \notin K$，并考虑所有形如

$$(-\infty, x - 1/n), \quad (x + 1/n, \infty), \qquad n \geq 1$$

的开区间；它们覆盖 $\mathbb{R}\setminus\{x\}$，因而覆盖 K。但任取有限个，设其中最大的指标为 N，则它们的并避开 $[x-1/N, x+1/N]$。由于 x 是 K 的邻近点，这一小区间里仍有 K 的点，故不可能得到有限子覆盖。矛盾证明了 K 闭。 □

序列紧性现在可以帮助我们把“接近想要的值”变成“确实取得这个值”。例如，上确界只保证函数值可以越来越接近它；若对应的输入点有收敛子列，连续性就能把这个上确界变成某一点的函数值。同样地，如果两列输入点距离越来越近，而输出却始终相隔一个固定量，序列紧性也会迫使它们在某个子列上趋于同一点，产生矛盾。

定理 2.1.7 (最值与一致连续性)**.** 非空序列紧集 $K \subseteq \mathbb{R}$ 上的连续实函数取得最大值与最小值，并且一致连续。

证明. 先证明 f 有上界。若没有，可选 $x_n \in K$ 使 $f(x_n) > n$，再由序列紧性取 $x_{n_k} \to x \in K$。连续性给出 $f(x_{n_k}) \to f(x)$，与 $f(x_{n_k}) > n_k \to \infty$ 矛盾。对 $-f$ 作同样论证，得到下界。

令 $M = \sup f(K)$。对每个 n，可选 $x_n \in K$ 使 $M - 1/(n+1) < f(x_n) \le M$。再次取 $x_{n_k} \to x \in K$，由连续性得到 $f(x) = M$。对 $-f$ 重复这一过程，得到最小值。

一致连续要求给定 $\varepsilon > 0$ 后，可以选同一个 $\delta > 0$ 控制 K 中任意一对点，而不是让 δ 依赖所选中心。若此条件失败，则存在固定的 $\varepsilon_0 > 0$，并可选 $x_n, y_n \in K$，使

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n+1}, \qquad |f(x_n) - f(y_n)| \ge \varepsilon_0.$$

取子列 $x_{n_k} \to x \in K$。由

$$|y_{n_k} - x| \le |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| \longrightarrow 0$$

可知对应的 y_{n_k} 也趋于 x。因此两列函数值都趋于 $f(x)$，它们的差不可能一直大于等于 ε_0。 □

闭集不一定是若干区间的简单拼接。我们最后构造一个闭集，使它不含任何一小段开区间，却仍有足够多的点连续映满 $[0,1]$。关键是每次留下左右两种选择：区间越来越短，但无限次选择仍可形成很多不同的地址。

例 2.1.8 (Cantor 集)**.** 从 $C_0 = [0,1]$ 出发，每一步都从保留的每个区间中去掉中间的开三分之一，得到

$$C_n = \bigcup_{i=1}^{2^n} F_i^n,$$

其中 F_i^n 是两两不相交、长度为 3^{-n} 的闭区间。*Cantor* 集定义为 $C = \bigcap_{n\ge 0} C_n$。它有界且闭，因而序列紧；它的内部为空。

图 2.1 中，每一层都是有限个闭区间的并，所以 C_n 闭，进而 C 闭。要看它没有内部，若某个非退化区间 J 包含于 C，则对每个 n 都有 $J \subseteq C_n$。区间 J 不能跨越两个 F_i^n 之间被删掉的空隙，因此只能落在一个 F_i^n 中，其长度便不超过 3^{-n}。令 n 增大即得矛盾。

现在把留下的点逐个描述出来。每个 $x \in C$ 在每一步都属于唯一一个保留区间；用 $\varepsilon_n = 0$ 表示第 n 步选左侧，$\varepsilon_n = 1$ 表示选右侧，就得到地址 $(\varepsilon_n)_{n\ge 1}$。反过来，任意这

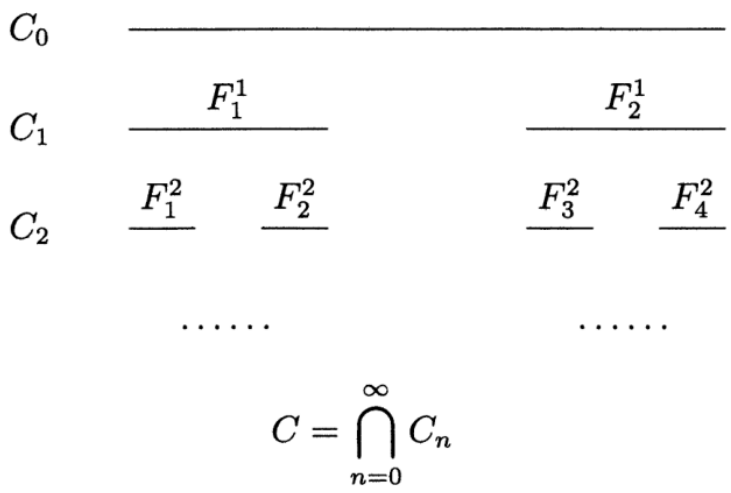


图 2.1: 三分 Cantor 集构造的最初几步。

样的地址给出一列长度趋于零的嵌套闭区间，由定理 1.2.4 确定唯一一点。每次选右侧就给左端点增加 $2 \cdot 3^{-n}$，因此

$$x = \sum_{n\geq 1} 2\varepsilon_n 3^{-n}.$$

这与定理 1.3.6 中的编码是同一构造，只是这里同时看到了各数位对应的区间。

接下来保留同一串地址，把三进制的 $0, 2$ 改读成二进制的 $0, 1$，定义

$$q : C \to [0,1], \qquad q(x) = \sum_{n\geq 1} \varepsilon_n 2^{-n}.$$

对任意 $t \in [0,1]$, 取一个二进制展开 $t = \sum_{n\geq 1} \varepsilon_n 2^{-n}$, 就能用同一地址构造满足 $q(x) = t$ 的点。端点 $t = 1$ 使用全部为 1 的展开，其余数的展开可由逐次二分 $[0,1]$ 得到，故 q 满射。虽然二进制展开可能不唯一，但这是在为给定 t 选择原像；定义 $q(x)$ 时，x 的左右地址已经唯一，所以映射仍然良定义。

为证明连续性，先给定 $\varepsilon > 0$，取 $n \geq 1$ 使 $2^{-n} < \varepsilon$。第 n 层保留的有限个闭区间之间有正的最小间隙，取 δ 小于这个间隙。若 $x, y \in C$ 且 $|x - y| < \delta$，它们就只能落在同一个第 n 层区间中，地址的前 n 位相同，于是

$$|q(x) - q(y)| \leq \sum_{k>n} 2^{-k} = 2^{-n} < \varepsilon.$$

因此 q 连续,甚至一致连续。它并非单射：$1/3$ 的地址为 $0, 1, 1, \ldots$，$2/3$ 的地址为 $1, 0, 0, \ldots$，二者都映到 $1/2$。这说明连续满射可以把一个处处没有小区间的集合映成整个区间，原像和像不必具有同样的形状。

2.2 平面的拓扑

实直线上用小区间测量接近程度，平面和 $\mathbb{R}^N$ 中则用小球。前一节的大部分证明只用到距离越来越小，以及从序列中逐次选取子列，因此可以沿用。真正需要先检查的是：分别控制每个坐标，是否就能同时控制整个点的位置?

以下维数 M, N 均取正整数。对 $x = (x_1, \dots, x_N)$，记

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \right)^{1/2}, \qquad B(x, r) = \{ y \in \mathbb{R}^N : \|x - y\| < r \}.$$

序列 $x(n)$ 收敛到 x 是指 $\|x(n) - x\| \to 0$。我们用圆括号中的 n 记录序列指标，用下标 i 记录坐标，因此第 n 项的第 i 个坐标是 $x(n)_i$。闭集仍指包含其中收敛序列极限的集合，开集仍是闭集的补集；连续性的 ε–δ 定义则把绝对值换成相应维数的欧氏范数。

命题 2.2.1 (坐标判定)**.** $\mathbb{R}^N$ 中的序列收敛，当且仅当每个坐标都收敛。映射 $f : D \subseteq \mathbb{R}^N \to E \subseteq \mathbb{R}^M$ 连续，当且仅当它保持序列极限；这又等价于每个坐标函数 f_i 连续。子集 $U \subseteq \mathbb{R}^N$ 开，当且仅当对每个 $x \in U$，存在 $r > 0$ 使 $B(x, r) \subseteq U$。

证明. 对任意 $v \in \mathbb{R}^N$，有

$$\max_i |v_i| \le \|v\| \le \sqrt{N} \max_i |v_i|.$$

左边说明整个向量趋于零时，每个坐标都趋于零。反过来，若每个坐标都趋于零，给定 $\varepsilon > 0$ 后，可以使第 i 个坐标最终小于 $\varepsilon/\sqrt{N}$；由于坐标只有有限个，取这些起始指标的最大值，就使所有坐标同时满足要求，右边不等式便给出范数小于 ε。

连续性与保持序列极限的等价性沿用定理 2.1.3 的反证构造：若在 a 不连续，就可在 $B(a, 1/(n+1)) \cap D$ 中选出输入，使输出与 $f(a)$ 的距离始终不小于某个固定正数。得到序列判定后，再对输出序列使用刚才的坐标结论，即知 f 连续当且仅当每个 f_i 连续。

最后，若开集 U 的某个点 x 附近没有球包含于 U，从每个 $B(x, 1/(n+1)) \setminus U$ 中选一点，就得到补集中的序列趋于 x，矛盾。反过来，若每个 $x \in U$ 附近有这样的球，补集中的序列便不可能趋于 U 中的点，所以 U 开。这就是命题 2.1.2 在小球语言下的证明。 □

特别地，收敛意味着序列最终落在极限点附近的每个开球中，也等价于最终落在包含该点的每个开集中。

这个证明中，有限个坐标允许我们取有限个起始指标的最大值。接下来选收敛子列时也使用同一有限性：先照顾第一坐标，再从已经选出的子列中照顾第二坐标，如此进行到第 N 个坐标。继续取子列不会破坏先前坐标的收敛，所以最后能够兼顾所有坐标。

定理 2.2.2 (欧氏空间中的序列紧性)**.** 对 $K \subseteq \mathbb{R}^N$，有界且闭、序列紧，以及每个序列在 K 中都有聚点这三个条件等价。这样的非空 K 上的连续实函数取得最值；从 K 到 $\mathbb{R}^M$ 的连续映射一致连续。

证明. 设 K 有界且闭。对其中一个序列，每个坐标序列都在某个有界闭区间内，所以可用定理 2.1.5：先取第一坐标收敛的子列，再从中取第二坐标收敛的子列，依次直到第 N 个坐标。由命题 2.2.1，最终子列在 $\mathbb{R}^N$ 中收敛；闭性保证其极限仍在 K 中。

若 K 无界，选择 $\|x(n)\| > n$ 即得到没有收敛子列的序列；若 K 不闭，按闭集定义可以找到趋于集合外一点的序列，极限唯一性排除了收敛到 K 内一点的子列。这里聚点仍指序列经常落在该点的每个邻域中。在 $B(x, 1/(k+1))$ 中逐次选取递增指标，得到“聚点是子列极限”；反方向由子列收敛直接得到，因此三个条件等价。

连续实函数的最值证明与定理 2.1.7 完全使用相同的步骤：先用输入点的收敛子列排除函数无界，再对趋于上、下确界的函数值选对应输入点。对映射 $f : K \to \mathbb{R}^M$，若不一致连续，则可选 $x(n), y(n) \in K$，使

$$\|x(n) - y(n)\| \to 0, \qquad \|f(x(n)) - f(y(n))\| \geq \varepsilon_0 > 0.$$

取 $x(n_k) \to x \in K$ 后，三角不等式使 $y(n_k)$ 也趋于 x，连续性又使两个像序列都趋于 $f(x)$，矛盾。 □

有了有限维空间中的收敛，我们可以严谨地研究曲线的逐步构造。这里的曲线只指有界闭区间上的连续映射，不要求单射，也不要求可微。若脑中始终把曲线想成光滑的一根线，就容易多加上定义里没有的限制。

我们希望让曲线覆盖整个正方形。一个有限步骤不可能靠依次画过若干条线段就覆盖它，但可以先要求曲线访问四个小正方形，再访问每个小正方形里的四个更小正方形，如此不断细分。为了使极限连续，这些访问次序不能每层随意重排：相邻的参数小区间必须对应相邻的小正方形，而且下一层的选择必须包含在上一层的选择之内。图 2.2 表示的正是这两种相容要求。

定理 2.2.3 (Peano 曲线)**.** 存在连续满射 $\gamma : [0,1] \to [0,1]^2$，从而也存在连续满射 $C \to [0,1]^2$。

证明. 记 $Q = [0,1]^2$。在第 n 层，将 $[0,1]$ 等分为 4^n 个闭区间

$$I_i^n = [i4^{-n}, (i+1)4^{-n}], \qquad 0 \leq i < 4^n,$$

并将 Q 分成同样数目的边长为 2^{-n} 的小正方形。我们先给出正方形访问次序的准确递归，这样就不必仅凭图来判断所有层都能衔接。

从左下角进入、右下角离开的 U 形次序，对应四个缩小映射

$$\begin{aligned} H_0(x,y) &= (y/2, x/2), & H_1(x,y) &= (x/2, (y+1)/2), \\ H_2(x,y) &= ((x+1)/2, (y+1)/2), & H_3(x,y) &= (1 - y/2, (1-x)/2). \end{aligned}$$

它们的像按次序是左下、左上、右上、右下四个小正方形；首尾两个映射还改变了方向，使各小图的出口与下一幅小图的入口相接。令 $S_0^0 = Q$。若第 n 层已经按次序排为 $S_0^n, \ldots, S_{4^n-1}^n$，下一层依次排成

$$H_0(S_0^n), \ldots, H_0(S_{4^n-1}^n), \quad H_1(S_0^n), \ldots, H_1(S_{4^n-1}^n), \quad \ldots,$$

最后一组是 H_3 的像；这就定义了 S_i^{n+1}。等价地，用四进制数字依次选择 $H_0, \ldots, H_3$，将长度为 n 的数字串对应到这些映射复合后的 Q。

这个递归保留两种相容性。首先，每个数字串后面再加一位，就把原来的正方形分成四个，因此

$$I_j^{n+1} \subseteq I_i^n \quad \Longleftrightarrow \quad S_j^{n+1} \subseteq S_i^n.$$

其次，相邻指标的正方形共边。同一组内部由归纳假设得到；两组交界处则由上面的四个公式直接核对。更具体地，若第 n 层边长为 h，首格总是 $[0,h]^2$，末格总是 $[1-h,1]\times[0,h]$。把末格代入 H_j、首格代入 H_{j+1}，便得到共一条边的两格。这同时说明递归后的首格和末格仍有刚才的形式，归纳可以继续。图 2.2 正是这一排列的前三层。

现在给定 $t \in [0,1]$，选择一列包含 t 的嵌套参数区间。对应的正方形也嵌套；对两个坐标分别用定理 1.2.4，得到公共点，再由直径 $\sqrt{2}\,2^{-n} \to 0$ 得到唯一性。将这个点定义为 $\gamma(t)$。

还需检查细分端点处的选择不会改变结果。若 t 同时属于两个小区间，在每一层的两种选择至多相差一个指标；对应正方形相同或共边，其并的直径不超过 $\sqrt{5}\,2^{-n}$。因而两种嵌套选择产生的点之间的距离对每个 n 都不超过这个量，只能是同一点。故 γ 良定义。

同一估计也给出连续性：若 $|s-t| < 4^{-n}$，就可选取包含它们的同一或相邻小区间，从而

$$\|\gamma(s) - \gamma(t)\| \le \sqrt{5}\,2^{-n}.$$

给定输出误差 $\varepsilon > 0$，先使右端小于 ε，再取输入误差 4^{-n} 即可。

最后检查满射性。给定 $z \in Q$，逐层选择包含 z 的嵌套小正方形；若 z 在分割边界上，任取一支并继续在该正方形内选择即可。对应的参数区间也嵌套，故有公共点 t。$\gamma(t)$ 与 z 都在每一个选定的小正方形里，而它们的直径趋于零，所以 $\gamma(t) = z$。因此 γ 是连续满射。再与例 2.1.8 中的 $q : C \to [0,1]$ 复合，得到连续满射 $\gamma \circ q : C \to Q$。 □

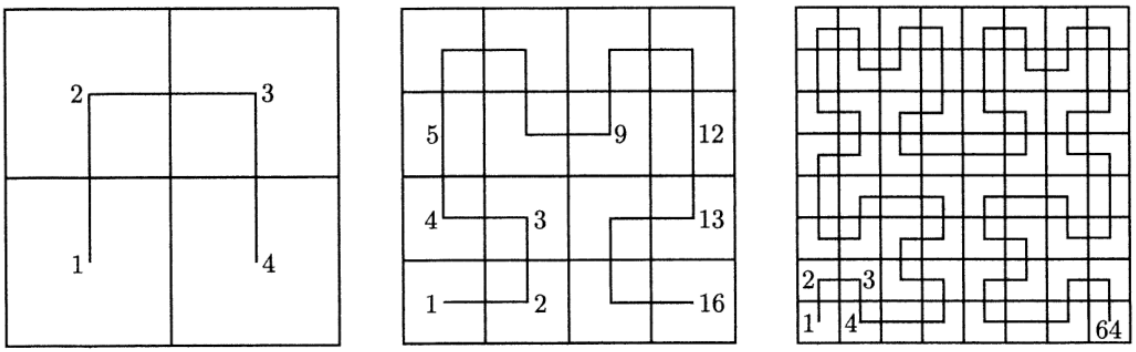


图 2.2: 前三次细分中相互相容的正方形排列。

因此，“连续曲线的像”不能直接理解为一维的细线：定义只约束相近参数的像要相近，允许不同参数对应同一个点。Cantor 集到区间、区间到正方形的连续满射都利用了这种余地。

若要说两个空间只是以不同方式表示同一个拓扑对象，就需要可以反向恢复每个点，而且反向恢复也不能破坏接近关系。首先要求双射解决点的一一对应，再要求逆映射连续。

定义 2.2.4 (同胚)**.** 若映射 $f : D \to E$ 为双射，且 f 与 f^{-1} 都连续，则称它为同胚映射，相应的两个空间称为同胚。等价地，存在连续映射 $f : D \to E$、$g : E \to D$，满足 $gf = 1_D$ 和 $fg = 1_E$。

例 2.2.5 (区间、凸区域与穿孔平面的同胚)**.** 映射

$$x \longmapsto (2\arctan x/\pi, 0)$$

是从 $\mathbb{R}$ 到 $(-1,1)\times\{0\}$ 的同胚；逆映射为 $(t,0)\mapsto \tan(\pi t/2)$。
闭圆盘、正方形、菱形和三角形彼此同胚。可以选择各自的内部中心，使每条从中心发出的线段对应到另一个区域中同方向的线段，并按比例伸缩长度。
穿孔平面 $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ 分别与 $\{x:\|x\|>1\}$、$\{x:0<\|x\|<1\}$ 同胚：写 $x=ru$，其中 $r>0$、$\|u\|=1$，分别作径向变换 $r\mapsto r+1$ 与 $r\mapsto r/(1+r)$。

径向构造需要核对的不只是双射，还包括中心处的连续性。将一个区域 K 的内部中心平移到原点，记方向 $u\in S^1$ 上到边界的距离为 $\rho_K(u)>0$。对单位闭圆盘中的 ru，定义

$$F(0)=0,\qquad F(ru)=r\rho_K(u)u\quad(0<r\le 1).$$

每条射线上的线性伸缩给出双射，逆映射为 $su\mapsto (s/\rho_K(u))u$。对圆盘，ρ_K 为正常数。对含原点于内部的凸多边形，可以把它写成有限个半平面的交

$$K=\bigcap_{j=1}^{m}\{x:\langle a_j,x\rangle\le b_j\},\qquad b_j>0,$$

由此得到

$$\rho_K(u)^{-1}=\max_{1\le j\le m}\frac{\langle a_j,u\rangle}{b_j}.$$

右边连续，而且在每个方向都为正，否则整条射线都留在多边形中，与有界性矛盾。因此 ρ_K 连续。区域中存在以原点为中心的一个小圆盘，并包含于某个大圆盘，所以 ρ_K 有正的下界和有限上界。于是 F 与逆映射在非零点由公式连续，在中心处则分别由

$$\|F(ru)\|\le r\sup\rho_K,\qquad \|F^{-1}(su)\|\le s/(\inf\rho_K)$$

得到连续。这就补足了径向伸缩的同胚证明，也说明区域有棱角并不妨碍同胚。

对穿孔平面的两个例子，中心已去掉，无需检查中心处；半径变换的逆分别为 $s\mapsto s-1$ 与 $s\mapsto s/(1-s)$，它们在对应半径区间上连续，方向 u 保持不变，因此两个映射及其逆都连续。

并不是所有常见图形都能这样对应。非退化开区间、非退化闭区间与闭圆盘两两不同胚：紧性将开区间与后两者区分开；去掉一个内点会使闭区间不连通，但从闭圆盘中去掉任意一点，剩余空间仍道路连通。后一事实可以先直观地看成“在圆盘内绕开这个点”，准确论证则是：对任意两个剩余点，选一个圆盘内点，使它不在这两个点与被删点各自确定的直线上，连接它们的两段线段便避开被删点。存在这样的内点，因为两条直线不能覆盖圆盘的内部。关于连通性、紧性及同胚如何保持它们，将在第 五 章和第 七 章中系统说明。

到这里，很多证明已经不再依赖平面的坐标，只需要距离、三角不等式和小球。下一章将把这些共同条件抽取成度量空间，使同样的思路能够用于函数与序列等更一般的对象。

第三章

度量空间

前一章中，我们借助实数和欧氏空间讨论了收敛、连续与序列紧性。若把点换成连续函数，坐标未必还适用，但“两个对象相差多少”仍可以用一个非负数来测量。我们先抽取距离满足的规则，再考察两个不同的问题：彼此越来越接近的点列是否一定有极限，以及任意点列能否选出一个收敛子列。前一个问题引出完备性，后一个问题还需要全有界性；将它们与开覆盖联系起来，也就为下一章摆脱距离的限制作好了准备。

3.1 度量、开集与闭集

在 $\mathbb{R}^N$ 中，判断 x_n 是否趋于 x，可以逐个检查坐标，也可以只看 $\|x_n - x\|$ 是否趋于零。后一种写法不必知道点有多少个坐标。例如，对于两个连续函数，我们可以比较它们在各点的差，再用最大的差或者差的积分来测量接近程度。我们希望把这些对象放在同一个框架中，因而先问：关于距离的哪些性质真正参与了证明？距离为零应当能辨认出同一个点；交换两点不应改变距离；经由第三点的两段路程应当能够控制直接的距离。这就是下面三条要求。

定义 3.1.1 (度量空间)**.** 集合 X 上的度量是映射 $d : X\times X \to [0,\infty)$，满足：$d(x,y) = 0$ 当且仅当 $x = y$；$d(x,y) = d(y,x)$；$d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$。二元组 (X,d) 称为度量空间。将度量限制在 $Y \times Y$ 上，得到度量子空间 $(Y, d|_Y)$。

定义并不要求距离一定来自直线长度。下面几类例子分别改变测量方式、改变允许行走的路径，或者直接把函数和序列作为点。我们要同时留意两件事：给出的公式是否确实是度量，以及距离很小究竟要求两个对象怎样接近。

例 3.1.2 (常见集合上的度量)**.**

1. 在 $\mathbb{R}$ 上，$|x - y|$ 是通常的距离。若先用单射 $x \mapsto \arctan x$ 把实直线压入 $(-\pi/2, \pi/2)$，再测量像点的距离，就得到 $|\arctan x - \arctan y|$。单射保证正定性，其余两条来自实数绝对值。任意集合上的离散度量规定：当 $x \neq y$ 时 $d(x,y) = 1$，并令 $d(x,x) = 0$。它完全不区分不同点之间的远近；半径小于等于 1 的开球只有球心一个点。

2. 在 $\mathbb{R}^N$ 上，对 $1 \le p < \infty$，定义

$$d_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p}, \qquad d_\infty(x,y) = \max_i |x_i - y_i|.$$

d_p 的三角不等式就是有限维 Minkowski 不等式；对 d_∞，逐坐标用 $|x_i - z_i| \le |x_i - y_i| + |y_i - z_i|$ 再取最大值即可。$p = 1, 2, \infty$ 分别给出出租车度量、欧氏度量和 Chebyshev 度量。前者把每个坐标方向的移动量相加，后者只取最大的一个；因此相同的“距离小于 1”会划出形状不同的区域。

3. 在单位圆或单位球面上，欧氏距离与球面弧长距离 $\arccos\langle x, y\rangle$ 都是度量。后者测量较短的大圆弧长。设两段夹角为 α, β；若 $\alpha + \beta \ge \pi$，三角不等式立即成立。若 $\alpha + \beta < \pi$，沿中间点的径向及其正交方向分解两端向量，由 Cauchy–Schwarz 不等式得 $\langle x, z\rangle \ge \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha + \beta)$，故 $\arccos\langle x, z\rangle \le \alpha + \beta$。几何上，这正是直接沿较短大圆弧行走，不会比经由第三点更长。

4. 对整数 $p \ge 2$ 及不同整数 x, y，记 $v_p(x - y)$ 为使 p^k 整除 $x - y$ 的最大非负整数 k，并约定 $v_p(0) = +\infty$。考虑度量

$$d(x, y) = \frac{1}{v_p(x - y) + 1}, \qquad d(x, x) = 0.$$

由 $v_p(a + b) \ge \min\{v_p(a), v_p(b)\}$，可得更强的三角不等式

$$d(x, z) \le \max\{d(x, y), d(y, z)\}.$$

这里“接近”不再指通常绝对值很小，而是指差能被很高次的 p 整除。对任意固定 k，当 $n \ge p^k$ 时，$n!$ 被 p^k 整除，所以 $d(n!, 0) \le 1/(k + 1)$。因此，在此度量下 $n! \to 0$。这一定义对任意整数 $p \ge 2$ 都成立；p 为素数时，它与通常的 p 进距离产生相同拓扑。

5. 在 $C[0, 1]$ 上，$\int_0^1 |f - g|$ 与 $d_\infty(f, g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$ 都是度量。积分度量的正定性来自连续性：若 $f(t_0) \ne g(t_0)$，就在 t_0 附近的一个正长度区间上有 $|f - g| \ge c > 0$，故积分为正。两种度量的三角不等式分别由逐点三角不等式取积分与取上确界得到。积分小允许误差集中在很窄的区间里，一致距离小则要求每一点的误差都小；图 3.2 正是在比较这两种要求。

6. 空间 $\ell^2 = \{x : \sum_{i\in\mathbb{N}} x(i)^2 < \infty\}$ 上的度量为 $d(x, y) = (\sum_i |x(i) - y(i)|^2)^{1/2}$。先由 $|x(i) - y(i)|^2 \le 2x(i)^2 + 2y(i)^2$ 知道这个距离有限。对有限部分和使用有限维的三角不等式，再令项数趋于无穷，即可验证三角不等式。这里允许无穷多个坐标，但平方和条件恰好保证距离仍是一个有限实数。

上面用到的 Minkowski 不等式也可以直接从凸性看出。记 $A = (\sum_i |u_i|^p)^{1/p}$、$B = (\sum_i |v_i|^p)^{1/p}$；若其中一个为零，结论立即成立。否则取 $t = A/(A + B)$，则

$$\frac{|u_i + v_i|}{A + B} \le t\frac{|u_i|}{A} + (1 - t)\frac{|v_i|}{B}.$$

对 $p \ge 1$，函数 $s \mapsto s^p$ 在 $[0, \infty)$ 上递增且凸。因此两边取 p 次幂后求和，得到

$$\sum_i \frac{|u_i + v_i|^p}{(A + B)^p} \le t\sum_i \frac{|u_i|^p}{A^p} + (1 - t)\sum_i \frac{|v_i|^p}{B^p} = 1.$$

取 p 次方根，就是 $\|u+v\|_p \le \|u\|_p + \|v\|_p$。这也补齐了例 3.1.2 中有限维度量和 ℓ^2 度量所依赖的三角不等式。

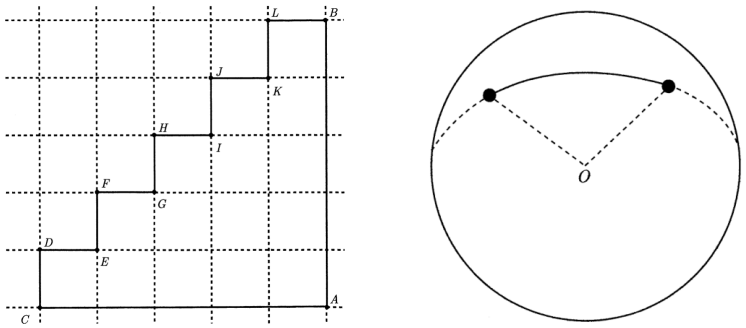


图 3.1: 沿坐标方向测量的距离与沿球面测量的距离。

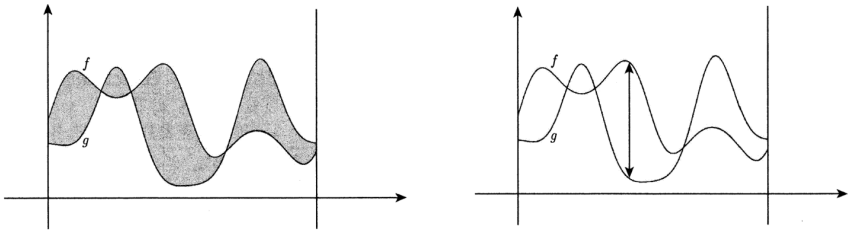


图 3.2: 积分度量测量面积，一致度量测量最大的竖直距离。

比较这些例子时，球的形状和数值会改变，但“把允许误差 r 取得更小”始终有意义。我们因此使用开球 $B_d(x,r) = \{y : d(x,y) < r\}$ $(r > 0)$，通常简记为 $B(x,r)$。序列收敛到 x 是指 $d(x_n, x) \to 0$。若它还趋于 y，则

$$d(x,y) \le d(x,x_n) + d(x_n,y) \longrightarrow 0,$$

所以极限唯一。这个论证只用了三角不等式，确实不再需要坐标。

一个集合若包含 x 周围的整只小球，那么误差足够小的点都不会离开它。我们用邻域记录这一局部性质，再把在每一点都有此性质的集合叫作开集。

定义 3.1.3 (邻域、开集与闭集)**.** 若子集 U 包含以 x 为中心的某个开球，则称它是 x 的邻域。若一个集合是其每个点的邻域，则称它为开集；补集为开集的集合称为闭集。

每个开球都是开集：若 $y \in B(x,r)$，则 $B(y, r - d(x,y)) \subseteq B(x,r)$。因此，开集恰为开球的并。空集与全空间是开集，任意个开集的并仍开，有限个开集的交也开，后者只需取有限个半径中的最小值。注意邻域不要求本身是开集，例如 $[-1,1]$ 是 0 的邻域；开集则要求每个点都留有一小圈余地。图 3.3 中的三个单位球虽形状不同，下面关于邻域与收敛的论证完全相同。

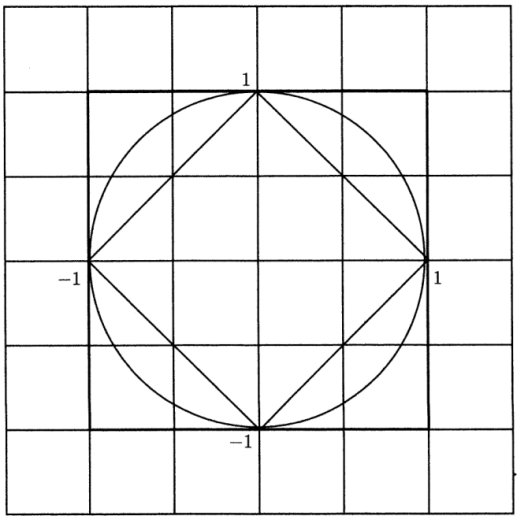


图 3.3: 平面中度量 d_1, d_2, d_∞ 对应的单位开球。

命题 3.1.4 (序列判定)**.** 序列收敛到 x，当且仅当它最终落在 x 的每个邻域中，也等价于最终落在包含 x 的每个开集中。集合 U 开，当且仅当每个收敛到 U 中一点的序列都最终落在 U 中。一个集合闭，当且仅当它包含其中所有收敛序列的极限。

证明. 先看极限。若 $d(x_n, x) \to 0$，任何包含 $B(x, r)$ 的邻域都最终包含 x_n；反过来，把邻域取为各个 $B(x, \varepsilon)$，就得到距离趋于零。由于每个邻域都包含一个开邻域，用全部开邻域判定也一样。

若 U 开，$x_n \to x \in U$，则 U 是 x 的邻域，所以 x_n 最终在 U 中。为证逆向，我们需要把“没有整只小球留在 U 内”改写成一个序列：若 $x \in U$ 不是内点，对每个 n 选择

$$x_n \in B(x, 1/(n+1)) \setminus U.$$

这样 $x_n \to x$，却没有任何一项属于 U，与条件矛盾。

若 F 闭而其中一列点趋于 $x \notin F$，开邻域 $X \setminus F$ 要求序列最终离开 F，矛盾。若 F 不闭，则 $X \setminus F$ 中有一点 x 不是其内点。沿用刚才的选点方法，得到 F 中趋于 x 的序列，因而序列条件也不成立。 □

给定任意子集 A，我们可以从两个方向整理它：在里面尽量取一个开集，得到那些周围还有余地的点；在外面尽量取一个闭集，把所有能由 A 逼近的点补进去。前者叫内部，后者叫闭包。两种处理之间剩下的部分就是边界：无论把视野缩得多小，都同时能看见 A 和它的补集。

定义 3.1.5 (内部、闭包与边界)**.** A 的*内部* A° 是包含于它的所有开集的并；A 的*闭包* $\overline{A}$ 是包含它的所有闭集的交。*边界*定义为 $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$。

由定义有 $A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A}$、$(A^\circ)^\circ = A^\circ$ 和 $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$。集合开或闭，分别等价于它等于自身的内部或闭包。更具体地，

$$\begin{aligned} x \in A^\circ &\iff A \text{ 是}x \text{ 的邻域,} \\ x \in \overline{A} &\iff B(x,r) \cap A \neq \varnothing \text{ 对任意} r > 0 \\ &\iff \text{存在} A \text{ 中的序列收敛于} x. \end{aligned}$$

当 $A \neq \varnothing$ 时，最后一个条件也等价于 $\inf_{a\in A} d(x,a) = 0$。若某个开球避开 A，它的补集就是包含 A 的闭集，这给出闭包的开球判定；再在 $A \cap B(x,1/n)$ 中逐次选点，便得到序列判定。取补集可得

$$A^\circ = X \setminus \overline{X \setminus A}, \qquad \overline{A} = X \setminus (X \setminus A)^\circ, \qquad \partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}.$$

因此，边界点可以分别用集合内外的序列逼近，且 $\partial A = \partial(X \setminus A)$。例如，$\mathbb{Q}^\circ = \varnothing$、$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$、$\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$。

有了闭包，我们可以从另一角度看连续性。若 x 能用 A 中的点逼近，连续映射应当使 $f(x)$ 也能用 $f(A)$ 中的点逼近；这写成 $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$。再把这一条件改写成逆像条件，就能从连续性的定义中去掉距离，只保留距离所确定的开集。

定理 3.1.6 (度量空间中的连续性)**.** 对度量空间之间的映射 $f : X \to Y$，下列条件等价：在 ε–δ 意义下连续；保持序列极限；对每个 $A \subseteq X$ 都有 $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$；闭集的逆像为闭集；开集的逆像为开集。在一点 x 处，连续性也等价于：对 $f(x)$ 的每个邻域 V，存在 x 的邻域 U，使 $f(U)$ 包含于其中。

证明. 连续映射保持序列极限：给定像空间中的误差 ε，连续性给出定义域误差 δ，而收敛序列最终满足后一误差。反过来，若 f 在 x 不连续，就存在 $\varepsilon_0 > 0$，使每个 $B(x,1/n)$ 中都能选到 x_n 满足

$$d_Y(f(x_n), f(x)) \geq \varepsilon_0.$$

于是 $x_n \to x$ 而 $f(x_n)$ 不趋于 $f(x)$，违背保持序列极限的条件。

若映射保持序列极限，对 $x \in \overline{A}$ 选 $a_n \in A$、$a_n \to x$，便有 $f(a_n) \to f(x)$，故 $f(x) \in \overline{f(A)}$。若闭包条件成立，对闭集 $F \subseteq Y$ 取 $A = f^{-1}(F)$，则

$$\overline{A} \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)}) \subseteq f^{-1}(F) = A.$$

因此闭集的逆像是闭集。逆像与补集可交换，所以这也等价于开集的逆像是开集。

最后，若开集的逆像开，则 $f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$ 是 x 的开邻域，因而包含某个 $B(x,\delta)$。于是 $d_X(x,y) < \delta$ 蕴含 $d_Y(f(x),f(y)) < \varepsilon$，回到了连续性的定义。逐点的邻域说法也是同一件事：先在 V 中取像点的小球，再用连续性找到能映入它的球；反过来把 V 取为任意 ε 球即可。 □

度量子空间中的开球满足 $B_Y(y,r) = Y \cap B_X(y,r)$。因此，它的开集与闭集分别是子空间与母空间开集、闭集的交；对 $A \subseteq Y$，有 $\mathrm{cl}_Y A = Y \cap \mathrm{cl}_X A$。但相对内部未必等于子空间与母空间内部的交，$Y = \{0\} \subseteq \mathbb{R}$ 就给出反例。

确实，$\{0\}$ 在 Y 中是全空间，因而是开集；在 $\mathbb{R}$ 中却没有内点。同一个集合是否有内部，必须连同正在使用的母空间一起理解。相对闭包的公式则说明：先在母空间补齐极限点，再只保留属于 Y 的那些点，与直接在子空间中取闭包一致。

现在可以通过所产生的开集，比较同一集合上的不同距离。

定义 3.1.7 (等价度量)**.** 同一集合上的两个度量若确定相同的开集，就称它们等价。

等价地，它们有相同的收敛序列及极限；也等价于任一度量的每个球都包含另一度量的某个同心球。将定理 3.1.6 用于两个方向的恒等映射，即得这些等价性。例如，$d' = \min\{d, 1\}$ 仍是度量，因为 $\min\{a+b, 1\} \le \min\{a, 1\} + \min\{b, 1\}$。半径小于 1 时两种球完全相同，所以 d 与 d' 等价。这说明把所有较大的距离截断，并不改变任何局部开集。在 $\mathbb{R}^N$ 上，

$$d_\infty \le d_p \le N^{1/p} d_\infty,$$

所以例 3.1.2(2) 中的度量都等价。$\mathbb{R}$ 上的欧氏度量与反正切度量也等价，因为 arctan 及其在 $(-\pi/2, \pi/2)$ 上的逆函数都连续。这里比较的是一个点附近的小球，允许所选半径依赖这个点；它没有提供整个空间统一的距离控制。因此，相同的开集虽然给出相同的收敛序列及其极限，却未必给出相同的 Cauchy 序列。下一节的 (n) 会把这一区别具体显示出来。

3.2 完备度量空间

在 $\mathbb{Q}$ 中，可以逐次取 $\sqrt{2}$ 的有限小数近似。越靠后的两项相差越小，但若要求极限仍是有理数，这个序列就没有极限。问题并不出在逼近过程，而在于空间缺少了应当到达的点。

如果还不知道极限在哪里，我们便不能直接检验 $d(x_n, x) \to 0$；能够检查的是尾部各项之间的距离。把“无论允许误差多小，足够靠后的任意两项都在这一误差内”写出来，就得到 Cauchy 条件。

定义 3.2.1 (Cauchy 序列与完备性)**.** 若对每个 $\varepsilon > 0$，存在 N，使 $n, m \ge N$ 时都有 $d(x_n, x_m) < \varepsilon$，则称序列 (x_n) 为 *Cauchy 序列*。若每个 Cauchy 序列都在空间内收敛，则称该度量空间完备。

若 $x_n \to x$，由 $d(x_n, x_m) \le d(x_n, x) + d(x, x_m)$ 可知序列必是 Cauchy 序列。需要注意，仅有相邻两项的距离趋于零并不够；例如调和级数的部分和满足这一条件，却不是 Cauchy 序列。定义中控制的是整个尾部任意两项的距离。

完备性与闭性有一个实用联系。若 Y 是完备空间 X 的闭子空间，Y 中的 Cauchy 序列先在 X 中得到极限，再由闭性知极限属于 Y，所以 Y 完备。反过来，即使母空间不完备，其中的完备子空间 Y 也一定闭：对 $x \in \mathrm{cl}_X Y$ 选 $y_n \in Y$ 趋于 x，则 (y_n) 为 Cauchy 序列；它又在 Y 中有极限，而度量极限的唯一性迫使该极限就是 x。先确认实数中的 Cauchy 序列确实收敛。取误差为 1，便知序列的尾部位于某个有界区间；再加上前面的有限项，整个序列仍有界。由定理 2.1.5，它有收敛子列，设极限为 a。给定 $\varepsilon > 0$，先使足够靠后的任意两项距离小于 $\varepsilon/2$，再从这些项中选一个距 a 小于 $\varepsilon/2$ 的子列项。三角不等式说明其余足够靠后的项也都距 a 小于 ε。因此整列收敛，$\mathbb{R}$ 完备。

欧氏空间中的 Cauchy 序列逐坐标都是实 Cauchy 序列，所以每个坐标都有极限；由命题 2.2.1，这些坐标合成整个序列的极限。这证明了欧氏空间的完备性。但 $(0, 1)$ 与 $\mathbb{Q}$ 在通常度量下不完备。在反正切度量下，$\arctan n \to \pi/2$，所以 (n) 是 Cauchy 序列；若

它在 $\mathbb{R}$ 中有极限 a，就必须有 $\arctan a = \pi/2$，这是不可能的。另一方面，这个度量与完备的欧氏度量等价。两者不矛盾：相同开集保证的是已有极限的收敛判定相同，并不保证两种距离下的 Cauchy 条件相同。因此，完备性是度量性质，不能仅由开集确定。

闭区间套的证明也是不断把候选点限制在更小的集合里。推广到度量空间时，不再有区间长度，但可以用直径 $\operatorname{diam} A = \sup\{d(x,y) : x, y \in A\}$ 控制集合内任意两点的距离。若嵌套集合的直径趋于零，从每层选出的点就会成为 Cauchy 序列；闭性负责把极限留在每一层里。

定理 3.2.2 (Cantor 完备性判定)**.** 度量空间完备，当且仅当每个满足 $\operatorname{diam} F_n \to 0$ 的递减非空闭集列 F_n 都有非空交。此时交集恰为一个点。

证明. 设空间完备，选 $x_n \in F_n$。若 $m \geq n$，则 $x_m, x_n \in F_n$，从而 $d(x_m, x_n) \leq \operatorname{diam} F_n$，所以 (x_n) 为 Cauchy 序列。设其极限为 x。对每个固定的 n，尾部所有项都在闭集 F_n 中，故 $x \in F_n$。若 x, y 都属于交集，则 $d(x,y) \leq \operatorname{diam} F_n$ 对每个 n 成立，故 $x = y$。

反过来，给定 Cauchy 序列 (x_n)，我们将它的尾部做成闭集套：

$$F_n = \overline{\{x_m : m \geq n\}}.$$

取闭包不会增大直径。确实，对闭包中的两点分别取原集合中的逼近序列，再对距离取极限，可得它们的距离不超过原集合的直径。因此，Cauchy 条件给出 $\operatorname{diam} F_n \to 0$。由假设选 $x \in \bigcap_n F_n$；当 $m \geq n$ 时，x_m 与 x 都在 F_n 中，故 $d(x_m, x) \leq \operatorname{diam} F_n$，于是 $x_m \to x$。 □

为了求解 $f(x) = x$，一种直接的尝试是任取 x_0，反复计算 $x_{n+1} = f(x_n)$。但仅仅反复代入并不能保证收敛。若每次应用 f 都把两点距离压缩到原来的 r 倍，$r < 1$，则相邻迭代之间的距离依次至多为 $d(x_1, x_0), rd(x_1, x_0), r^2 d(x_1, x_0), \ldots$。这些误差的尾和趋于零，恰好给出了 Cauchy 条件；这时完备性才把迭代变成一个真正存在的解。

定理 3.2.3 (Banach 不动点定理)**.** 设 X 为非空完备度量空间。若映射 $f : X \to X$ 对所有 x, y 满足 $d(f(x), f(y)) \leq rd(x,y)$，其中 $0 \leq r < 1$，则它恰有一个不动点。

证明. 若 $r = 0$，则 f 是常值映射，设其值为 c，便有 $f(c) = c$，且不动点只能是 c。以下设 $0 < r < 1$。取 $x_0 \in X$，令 $x_{n+1} = f(x_n)$。先由距离估计归纳得到 $d(x_{k+1}, x_k) \leq r^k d(x_1, x_0)$。对 $m > n$，把相邻距离相加，有

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{k=n}^{m-1} r^k d(x_1, x_0) \leq \frac{r^n}{1-r} d(x_1, x_0).$$

因此 $x_n \to x$。给定 $\varepsilon > 0$ 时，距离小于 ε/r 的两点，其像的距离小于 ε，所以 f 连续，故 $f(x) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = x$。若有两个不动点，则满足 $d(x,y) \leq rd(x,y)$，从而必相同。

上面的估计还说明怎样控制迭代误差：固定 n，令 $m \to \infty$，得到

$$d(x, x_n) \leq \frac{r^n}{1-r} d(x_1, x_0).$$

所以无论起点怎样选择，迭代都到达同一个不动点，并且可以预先估计需要迭代多少次。 □

接下来我们希望把“不动点”本身取成一个函数。这样，迭代的每一步都是一条新函数，而应用 Banach 定理以前，先要证明所用函数空间完备。对集合 X，记 $\ell^\infty(X)$ 为其上的全体有界实函数，赋予一致度量 $d_\infty(f,g)=\sup_x|f(x)-g(x)|$。有界性保证距离有限；当 $X=\varnothing$ 时，空间只有空函数一个元素，规定它到自身的距离为 0。

命题 3.2.4 (一致度量下的完备性)**.** 空间 $\ell^\infty(X)$ 完备。对度量空间 X，有界连续函数构成的空间 $C^*(X)$ 是其闭子空间，因而也完备。特别地，$C[0,1]$ 在一致度量下完备。

证明. 设 (f_n) 在一致度量下为 Cauchy 序列。对每个固定的 x，由 $|f_n(x)-f_m(x)|\le d_\infty(f_n,f_m)$ 可知实数列 $(f_n(x))$ 为 Cauchy 序列，因而可定义 $f(x)=\lim_n f_n(x)$。现在要检查：逐点选出的这些极限是否组成一个有界函数，以及收敛是否仍是一致的。

给定 $\varepsilon>0$，选 N，使对 $m,n\ge N$ 及所有 x 都有 $|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon/2$。令 $m\to\infty$，得到

$$|f_n(x)-f(x)|\le\varepsilon/2\qquad(n\ge N,\ x\in X).$$

同一个 N 适用于全部 x，所以 f_n 一致收敛到 f。先取一次 $\varepsilon=2$，便有 $|f(x)|\le|f_N(x)|+1$，由 f_N 有界知 f 也有界。这就证明了 $\ell^\infty(X)$ 完备。

若每个 f_n 连续，为证 f 在 x 连续，先选 N 使 $d_\infty(f,f_N)<\varepsilon/3$，再利用这个固定函数 f_N 的连续性，取 x 的小邻域，使其中的 y 满足 $|f_N(x)-f_N(y)|<\varepsilon/3$。于是

$$|f(x)-f(y)|\le|f(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(y)|+|f_N(y)-f(y)|<\varepsilon.$$

这说明 $C^*(X)$ 在一致极限下封闭，故为完备空间的闭子空间。$[0,1]$ 上连续函数有界，所以 $C[0,1]=C^*([0,1])$，最后的结论随之成立。 □

有了这个函数空间，我们试着构造一个连续却没有有限导数的函数。仅在某几个点上画尖角不够，因为我们要让每个点附近都出现过陡的差商。一种办法是把同一种折返图形不断缩小：横向每次缩到 $1/3$，纵向变化至少保留 $1/2$，那么在第 n 层，端点差商就至少具有 $(3/2)^n$ 的量级。

困难在于无限次重复以后，是否还得到连续函数。下面把“一次缩小并拼接”写成函数空间上的压缩映射；它的不动点自动完成所有层的重复。

定理 3.2.5 (连续而处处不可微的函数)**.** $[0,1]$ 上存在连续且处处不可微的实函数。

证明. 在完备的闭子空间 $E=\{f\in C[0,1]:f(0)=0,f(1)=1\}$ 上定义

$$T(f)(t)=\begin{cases}\dfrac{3}{4}f(3t), & 0\le t\le\dfrac{1}{3},\\[2mm] \dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}f(2-3t), & \dfrac{1}{3}\le t\le\dfrac{2}{3},\\[2mm] \dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}f(3t-2), & \dfrac{2}{3}\le t\le 1.\end{cases}$$

先检查这个操作确实仍落在 E 中。在 $t=1/3$ 处两侧函数值都是 $3/4$，在 $t=2/3$ 处两侧都是 $1/4$，而外端点值仍为 $0,1$，所以三段能够连续拼接。E 是 $C[0,1]$ 的非空闭子空间，因为一致极限保留这两个端点值。又有

$$d_\infty(Tf,Tg)\le\frac{3}{4}d_\infty(f,g),$$

所以存在不动点 $h \in E$。

现在利用 $h = Th$ 看它的小尺度变化。第一层三个区间的端点差分别为 $3/4$、$-1/2$ 和 $3/4$。每一段又是整条 h 的纵向缩放和平移，中间一段还反转横向参数。因此，对 n 归纳可知：在每个三进细分区间 $[(k-1)3^{-n}, k3^{-n}]$ 上，端点差的绝对值都是 n 个因子的乘积，而各因子为 $3/4$ 或 $1/2$，故至少为 2^{-n}。对任意 x，选取包含它的上述小区间，则至少一个端点 t_n 满足 $|h(t_n) - h(x)| \geq 2^{-n-1}$，同时 $0 < |t_n - x| \leq 3^{-n}$。于是相应差商的绝对值至少为 $\frac{1}{2}(3/2)^n \to \infty$。因此不存在有限导数，在端点处也不存在有限单侧导数。 □

上面的构造靠嵌套的小尺度变化得到一个特殊函数。完备性还有一种更一般的用法：把可数多个要求逐个安排到越来越小的闭球里，最后找一个同时满足所有要求的点。要实施这一做法，每一步都必须还能在任意小的开区域内继续选点。于是我们先区分“处处可以找到点”的稠密集，与“任意开区域都能再避开它”的无处稠集。

定义 3.2.6 (稠密、无处稠与第一纲集)**.** 若 $\overline{D} = X$，则称子集 D *稠密*，等价地，它与每个非空开集相交。若 $(\overline{A})^\circ = \varnothing$，则称子集 A *无处稠*；可数个无处稠集的并称为*稀疏集*，也称第一纲集。

稠密开集的补集是无处稠闭集；无处稠集的闭包仍无处稠；稀疏集的子集以及可数个稀疏集的并仍稀疏。这些事实直接由闭包的单调性得到。因此，我们可以用两种等价方式表述所需结论。

其中 A 无处稠的条件也可以这样读：对每个非空开集 V，都存在非空开集 $W \subseteq V$ 使 $W \cap A = \varnothing$。因为 V 不能整个包含在 $\overline{A}$ 中，可以在 $V \setminus \overline{A}$ 内选取这样的 W；反过来，若 $\overline{A}$ 有非空内部，其中就不可能找到避开 A 的非空开集。这里必须先取闭包：$\mathbb{Q}$ 虽然内部为空，却并非无处稠。

定理 3.2.7 (Baire 纲定理)**.** 完备度量空间中，可数个稠密开集的交仍稠密。等价地，每个稀疏子集的内部为空。非空完备度量空间不是自身的稀疏集。

证明. 设 U_n 为稠密开集。为证它们的交稠密，只需从任意给定的非空开集 V 出发，找到一点同时属于 V 及全部 U_n。我们逐步缩小闭球，第 n 步保证以后选出的点都不再离开前 n 个开集。

由 U_1 稠密，$V \cap U_1$ 非空且开，因而可选 x_1 及 $0 < r_1 < 1$，使闭球 $F_1 = \{x : d(x, x_1) \leq r_1\}$ 包含在其中。这里先在开集中选一只开球，再把半径取得更小，就能把整个闭球也放进去。设 F_n 已选好。$B(x_n, r_n) \cap U_{n+1}$ 仍是非空开集，再选择闭球

$$F_{n+1} \subseteq B(x_n, r_n) \cap U_{n+1}, \qquad 0 < r_{n+1} < 1/(n+1).$$

这些闭球非空、嵌套，而且 $\operatorname{diam} F_n \leq 2r_n \to 0$。由定理 3.2.2，交集中有一点；它属于 $V \cap \bigcap_n U_n$，完成稠密性的证明。

若 $A = \bigcup_n A_n$，各 A_n 无处稠，则 $X \setminus \overline{A_n}$ 是稠密开集，所以 $X \setminus \bigcup_n \overline{A_n}$ 稠密。它包含于 $X \setminus A$，故 A 不包含非空开集。反过来，对稠密开集取补集，它们的补集均无处稠；若其并内部为空，原来开集的交便稠密。非空空间的整个空间是非空开集，因此不能是自身的稀疏集。 □

例 3.2.8 (母空间与 Baire 纲的应用)**.** Cantor 集在 $\mathbb{R}$ 中无处稠，但它不是自身的稀疏集，因为它是非空完备度量空间。可见，母空间会影响结论。有理数集在 $\mathbb{R}$ 中是可数个无处稠单点集的并；在 $\mathbb{Q}$ 自身中，单点仍然闭且没有内部，所以 $\mathbb{Q}$ 在自身中也稀疏。无理数集在 $\mathbb{R}$ 中却不是稀疏集，否则把它与 $\mathbb{Q}$ 相并，会使完备的 $\mathbb{R}$ 在自身中稀疏，违背 Baire 纲定理。不存在恰在有理点连续的函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$：对每个 $n\geq 1$，令 U_n 由这样的点 x 构成：存在包含 x 的开区间 I，使 $\sup_{s,t\in I}|f(s)-f(t)|<1/n$。同一开区间内的每个点都满足这个条件，所以 U_n 开。连续点属于全部 U_n；反过来，若 $x\in\bigcap_n U_n$，对任意 $\varepsilon>0$ 取 $1/n<\varepsilon$，相应区间内有 $|f(t)-f(x)|<\varepsilon$，故 f 在 x 连续。这样，其连续点集恰为 $\bigcap_{n\geq 1}U_n$。若这个交等于 $\mathbb{Q}$，则所有 U_n 都稠密且开；对 $q\in\mathbb{Q}$，集合 $\mathbb{R}\setminus\{q\}$ 也稠密且开。把这两族集取交却得到空集，与定理矛盾。

最后回到本节最初的缺口：若一个度量空间不完备，能否像从 $\mathbb{Q}$ 到 $\mathbb{R}$ 一样，补入缺少的极限？我们希望保留原有点之间的每一个距离，所以要求原空间通过保距映射进入新空间。又不希望加入与原空间毫无关系的额外部分，所以要求原空间的像稠密，即每个新点都能由原来的点逼近。

定义 3.2.9 (完备化)**.** 保持所有距离的映射称为*保距映射*。X 的*完备化*是一个完备度量空间 $\widetilde{X}$，以及像稠密的保距映射 $j:X\to\widetilde{X}$。若存在 $L\geq 0$ 使 $d_Y(f(x),f(y))\leq Ld_X(x,y)$，则称 $f:X\to Y$ 满足 *Lipschitz* 条件。若对每个 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使任意 $x,y\in X$ 满足 $d_X(x,y)<\delta$ 时都有 $d_Y(f(x),f(y))<\varepsilon$，则称 f *一致连续*；这里同一个 δ 必须适用于所有点。

如果想把定义在稠密子集上的函数也延伸到新点，就没有自由选择函数值：当 $a_n\to x$ 时，连续性迫使新值为 $\lim f(a_n)$。这里有两个要检查的问题：像序列是否有极限，以及换一条逼近序列是否得到相同的值。一致连续性将定义域中的 Cauchy 控制送到像空间中，完备性再提供极限。仅有逐点连续不够，例如 $1/x$ 在稠密子空间 $(0,1]\subseteq[0,1]$ 上连续，却不能连续延拓到 0。

引理 3.2.10 (稠密子空间上的延拓)**.** 设 A 在度量空间 X 中稠密，Y 完备。每个一致连续映射 $f:A\to Y$ 都有唯一的连续延拓 $\bar{f}:X\to Y$。该延拓仍一致连续，并保留 f 的任意 Lipschitz 常数；若 f 保距，则延拓也保距。

证明. 对 $x\in X$ 选 $a_n\in A$ 使 $a_n\to x$。先确认像序列有极限：给定 $\varepsilon>0$，由一致连续性选一个对所有点有效的 $\delta>0$，而 a_n 为 Cauchy 序列，所以足够靠后的任意两项相距小于 δ，其像便相距小于 ε。因此 $f(a_n)$ 为 Y 中的 Cauchy 序列，由完备性定义

$$\bar{f}(x)=\lim_{n} f(a_n).$$

若另有 $b_n\to x$，则 $d_X(a_n,b_n)\leq d_X(a_n,x)+d_X(x,b_n)\to 0$。一致连续性给出 $d_Y(f(a_n),f(b_n))\to 0$，故两列像的极限相同，定义与逼近序列无关。当 $x\in A$ 时，可取常值逼近序列，所以 $\bar{f}(x)=f(x)$。

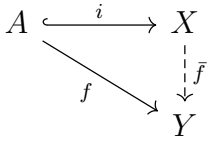
为证延拓仍一致连续，给定 $\varepsilon>0$，先选 $\delta>0$，使 A 中距离小于 δ 的任意两点，其像的距离小于 $\varepsilon/2$。若 $d_X(x,x')<\delta/3$，选 $a_n\to x$、$b_n\to x'$；当 n 足够大时，由三角

不等式有 $d_X(a_n, b_n) < \delta$。取极限得到

$$d_Y(\bar{f}(x), \bar{f}(x')) \le \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

同一个 $\delta/3$ 控制所有 x, x'，故延拓一致连续。

任何连续延拓 g 都必须满足 $g(x) = \lim_n g(a_n) = \lim_n f(a_n)$，所以等于 $\bar{f}$。若 f 满足常数为 L 的 Lipschitz 不等式，对 a_n, b_n 的不等式取极限即得相同常数的估计；若原来是距离相等，同样取极限得到保距性。 □



(3.2.1)

交换图 3.2.1 表示 $\bar{f} \circ i = f$：先把原来的点看作 X 中的点，再应用延拓，不会改变旧函数值。唯一性讨论的是这一规定下的延拓，而不是任意两个连续映射都相同。

现在可以在一个已知完备的函数空间中构造完备化，再用延拓引理证明唯一性。

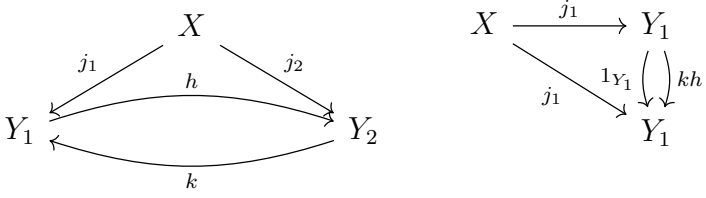
为了构造完备化，我们已经有一个现成的完备空间 $C^*(X)$。能否把点 a 编码成其中一个函数，并且从两函数之间的一致距离读出原来的 $d(a, b)$？最先想到的是距离函数 $x \mapsto d(x, a)$，但它在无界空间上可能不有界。若减去同一个基准距离 $d(x, x_0)$，反三角不等式便使差值有界；两函数相减时这个基准项又消掉，原距离因此得以保留。

定理 3.2.11 (完备化的存在与唯一性)**.** 每个非空度量空间都有完备化。若 (Y_1, j_1) 与 (Y_2, j_2) 都是 X 的完备化，则存在唯一的满保距映射 $h : Y_1 \to Y_2$，满足 $hj_1 = j_2$。

证明. 固定 $x_0 \in X$，定义 $j(a)(x) = d(x, a) - d(x, x_0)$。两个距离函数都连续，且由反三角不等式有 $|j(a)(x)| \le d(a, x_0)$，所以 $j(a) \in C^*(X)$。再次使用反三角不等式，得到

$$d_\infty(j(a), j(b)) = \sup_x |d(x, a) - d(x, b)| = d(a, b),$$

其中等号在 $x = a$ 处取得。因此，$C^*(X)$ 中的闭子空间 $\widetilde{X} = \overline{j(X)}$ 完备，$(\widetilde{X}, j)$ 就是一个完备化。为证唯一性，由引理 3.2.10 延拓 $j_2 j_1^{-1} : j_1(X) \to Y_2$ 及其逆，得到保距映射 h, k。复合 kh 与 hk 在相应稠密子集上等于恒等映射；由引理中的唯一性，它们在整个空间上都是恒等映射。 □



(3.2.2)

交换图 3.2.2 中的 h, k 都由稠密子集上的对应唯一延伸而来。等式 $kh = 1_{Y_1}$ 与 $hk = 1_{Y_2}$ 不仅说明两空间保距，还说明延拓没有遗漏任何新点：h 必为满射。空度量空间的完备化可取空空间本身；上面的非空假设只是为了选基点 x_0。

3.3 序列紧度量空间

完备性只处理已经满足 Cauchy 条件的序列。比如 $\mathbb{R}$ 完备，但序列 $x_n = n$ 根本没有收敛子列；所以若想使任意序列都有收敛子列，还必须限制点彼此分散的程度。

回想有界区间中的选子列方法：把区间分成有限个小段，总有一段含有无穷多项，再对这一段继续细分。在一般度量空间中，我们不再切区间，而是用有限只小球覆盖。这样才能用“有限个容器中至少一个装有无穷多项”的办法不断继续。

定义 3.3.1 (全有界性)**.** 若对每个 $\varepsilon > 0$，度量空间都有一个由半径为 ε 的球构成的有限覆盖，则称它全有界。

等价地，对每个 $\varepsilon > 0$，空间都有一个由直径不超过 ε 的子集构成的有限覆盖。由球覆盖得到后一说法，只需使用半径为 $\varepsilon/2$ 的球；反过来，先取直径不超过 $\varepsilon/2$ 的有限覆盖，再在每个非空成员中选一点，以它为球心作半径 ε 的球，便包含该成员。

这种等价说法也避免了球心的位置问题。若 $Y \subseteq X$，将 X 的有限小直径覆盖与 Y 相交，仍是 Y 的有限小直径覆盖；在这些交集中选球心即可。因此全有界性传给任意子空间，不要求子空间闭。序列紧性可以传给闭子空间；而度量空间中的序列紧子空间必闭，否则趋于子空间外一点的序列会有子列收敛到子空间内的另一点，违反极限唯一性。

我们接下来要把“任意序列有收敛子列”与“开覆盖有有限子覆盖”联系起来。对一个开覆盖，每一点附近都能取小球放进某个覆盖成员，但半径可能随着点改变。若有一个统一半径，全有界性就会立即给出有限子覆盖。下面的引理正是把逐点选出的半径统一起来。

引理 3.3.2 (Lebesgue 数引理)**.** 若 X 序列紧，$\mathcal{U}$ 是开覆盖，则存在 $r > 0$，使每个开球 $B(x, r)$ 都包含在 $\mathcal{U}$ 的某个成员中。

证明. 若不存在统一的 r，则对每个 $n \geq 1$，可以选择一个使半径 $1/n$ 仍然过大的点 x_n，即 $B(x_n, 1/n)$ 不包含于覆盖的任何成员。由序列紧性，取子列 $x_{n_k} \to x$。选 $U \in \mathcal{U}$ 包含 x，再利用开性取 $B(x, \varepsilon) \subseteq U$。

当 k 足够大时，球心 x_{n_k} 到 x 的距离小于 $\varepsilon/2$，而球半径 $1/n_k$ 也小于 $\varepsilon/2$。三角不等式于是给出

$$B(x_{n_k}, 1/n_k) \subseteq B(x, \varepsilon) \subseteq U,$$

与这些球的选取矛盾。这里序列紧性使所有失败的球心聚集到一个点，才得以用该点的一个开邻域同时控制它们。 □

现在这两个条件共同给出度量空间紧性的三种等价形式：覆盖条件、度量条件和序列条件。

定理 3.3.3 (度量空间的紧性)**.** 对度量空间 X，下列条件等价：

1. 每个开覆盖都有有限子覆盖；
2. X 完备且全有界；
3. X 序列紧。

证明. (1) ⇒ (2)：对全体半径为 ε 的球构成的开覆盖应用 (1)，就得到全有界性。为证完备，使用 Cantor 判定。若非空递减闭集 F_n 的直径趋于零，但 $\bigcap_n F_n = \varnothing$，则开集 $X \setminus F_n$ 覆盖 X。任何有限多个这样的开集之并，都等于其中指标最大的一个，不能覆盖非空的相应 F_n，所以没有有限子覆盖，矛盾。定理 3.2.2 因而给出完备性。

(2) ⇒ (3)：给定序列 (x_n)。用有限个半径 1 的球覆盖 X，至少有一只球包含无穷多个序列项的指标，记这些指标组成 I_1。再用有限个半径 $1/2$ 的球覆盖，从 I_1 中保留无限子集 I_2，使这些项同在其中一球。继续得到

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots,$$

且 I_k 对应的点同在一只半径 $1/k$ 的球中。逐次选 $n_k \in I_k$ 并要求 $n_{k+1} > n_k$；这能够做到，因为各 I_k 无限。对 $j, \ell \geq k$，所选两项的指标都属于 I_k，所以

$$d(x_{n_j}, x_{n_\ell}) < 2/k.$$

所得子列为 Cauchy 序列，再由完备性得到收敛。两项条件的作用在这里分开了：全有界性负责选出 Cauchy 子列，完备性负责给它极限。

(3) ⇒ (1)：先说明序列紧性迫使 X 全有界。否则存在 $r > 0$，任何有限个半径 r 的球都不能覆盖 X。从任意 x_1 出发，可以逐次选

$$x_{n+1} \notin \bigcup_{i \leq n} B(x_i, r).$$

所得各点的两两距离至少为 r，因而任何子列都不是 Cauchy 序列，更不可能收敛，矛盾。

对给定开覆盖，由引理 3.3.2 取统一半径 r，再由全有界性取有限个半径 r 的球覆盖 X。为每只球选一个包含它的原覆盖成员，这有限多个成员就是所需子覆盖。 □

例 3.3.4 (有界、全有界与完备的区别)**.** 无限集配备离散度量后直径为 1，所以有界；然而半径 $1/2$ 的每只球只有一点，有限只球无法覆盖它，所以不全有界。事实上它还完备，因为其 Cauchy 序列最终只能停在同一点。这说明“完备且有界”仍不足以替代“完备且全有界”。$\mathbb{R}$ 上的反正切度量全有界，因为它将空间保距地对应到 $(-\pi/2, \pi/2)$，但它不完备。对例 3.1.2 中 $\mathbb{Z}$ 上的整除度量，若两整数属于同一个模 p^k 的剩余类，其差被 p^k 整除，距离就不超过 $1/(k+1)$。模 p^k 只有有限个剩余类，而 k 可以任意大，所以 $\mathbb{Z}$ 全有界。这里得到的是任意精度的有限覆盖，并没有因此断言空间完备。

在一般拓扑空间中，我们将用覆盖条件定义紧性。它与序列紧性的等价依赖于度量假设，不能不加证明地推广到一般情形。

第四章

拓扑空间

度量给出了距离的数值，但判定连续映射时，我们最后只检查开集的逆像。于是可以继续问：若只保留哪些集合是开的，还能讨论多少已有的性质？本章从开集公理出发，重新建立邻域、闭包和连续性，再用基把庞大的开集族化成较容易操作的数据。最后我们会发现，序列在一般空间中不足以描述所有闭包点；把自然数指标换成能够适应邻域的定向集，便得到网。

4.1 拓扑、邻域、内部与闭包

定理 3.1.6 已经把连续性写成“开集的逆像仍开”。如果两个度量产生相同开集，它们就无法用连续映射来区分；这提示我们，研究连续性时可以直接指定开集，而不必先选一个距离。

当然，不能任意把一些子集叫作开集。度量开集总对任意并和有限交封闭：前者表示每个点可以各自找到小邻域，后者表示有限多个局部要求能够同时满足。我们把这些在证明中真正用到的规则留下来，作为新的出发点。

定义 4.1.1 (拓扑). 集合 X 上的一个*拓扑*是子集族 $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$，它包含 $\varnothing, X$，并且对有限交与任意并封闭。二元组 $(X, \mathcal{O})$ 称为*拓扑空间*；$\mathcal{O}$ 的成员称为*开集*，开集的补集称为*闭集*。

等价地，闭集族包含 $\varnothing, X$，且对有限并与任意交封闭。由命题 1.1.1，对这些集合取补即可恢复开集。若 $\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}_2$，则称拓扑 $\mathcal{O}_1$ 比 $\mathcal{O}_2$ *粗*，相应地称 $\mathcal{O}_2$ 更*细*。

例 4.1.2 (几类基本拓扑).

1. 平庸拓扑是 $\{\varnothing, X\}$，离散拓扑是 $\mathcal{P}(X)$；它们分别是 X 上最粗与最细的拓扑。
2. 度量 d 产生拓扑 $\mathcal{O}_d$。若一个空间的拓扑是某个度量 d 所产生的 $\mathcal{O}_d$，则称该空间*可度量化*。
3. Sierpiński 空间 **2** 的底集为 $\{0,1\}$，开集为 $\varnothing, \{1\}, \{0,1\}$。它允许用开集将 1 与 0 区分开，却没有只包含 0 的非空真开集。这种不对称性已经说明一般拓扑比度量拓扑更宽泛。
4. $\mathbb{R}$ 上的右拓扑由 $\varnothing, \mathbb{R}$ 以及射线 (a, ∞) 构成；闭集为 $\varnothing, \mathbb{R}$ 以及 $(-\infty, a]$。例如 x 的开邻域只限制左端点小于 x，不会限制向右延伸多远；所以这与通常的实直线拓扑不同。

5. X 上的有限补拓扑由 $\varnothing$ 以及补集有限的集合组成；将 “有限” 换成 “可数”，便得到可数补拓扑。有限交与任意非空并都保持相应的补集条件。

在这些空间中已经未必有球，但 “一个集合包含 x 周围的整块开区域” 仍有意义。因此称 U 为 x 的邻域，是指存在开集 V 满足 $x \in V \subseteq U$；记全部邻域为 $\mathcal{N}(x)$，其中也包括不开的邻域。内部、闭包、边界和稠密性也沿用第 三 章的定义：取包含于 A 的最大开集，或包含 A 的最小闭集，并不需要距离。沿用取补集的证明可得

$$x \in A^\circ \iff A \in \mathcal{N}(x), \quad x \in \overline{A} \iff U \cap A \neq \varnothing \quad (U \in \mathcal{N}(x)),$$
$$A^\circ = X \setminus \overline{X \setminus A}, \qquad \partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}.$$

特别地，D 稠密，当且仅当它与每个非空开集相交。闭包的判定涉及所有邻域；对一般拓扑，我们目前还不能使用序列判定。

假设某个问题首先告诉我们哪些点应该添入 A 的闭包，而没有直接给出开集。能否从 “把这些点加进 A” 的操作反过来建立拓扑? 对真正的闭包，空集不增添点，原集合的点不会丢失，有限并可以分别闭包，而且补齐一次以后不应再添新点。下面的定理说明，这四条规则已经足够。证明的关键是把不再发生变化的集合当作闭集：若 $c(F) = F$，便说明 F 已经包含了这个运算要求补入的所有点。

定理 4.1.3 (Kuratowski 闭包定理)**.** 映射 $c : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ 是唯一一个拓扑的闭包算子，当且仅当

$$c(\varnothing) = \varnothing, \quad A \subseteq c(A), \quad c(A \cup B) = c(A) \cup c(B), \quad c(c(A)) = c(A).$$

证明. 若 c 是拓扑闭包，空集、包含性和幂等性直接来自最小闭集的定义。又因为 $\overline{A} \cup \overline{B}$ 是闭集，并且是包含 $A \cup B$ 的最小闭集，所以 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$。

反过来，设 c 满足这四条规则，规定 $c(F) = F$ 的集合为闭集。我们先从有限并规则推出单调性：若 $A \subseteq B$，则 $B = A \cup B$，故 $c(B) = c(A) \cup c(B)$，也就是 $c(A) \subseteq c(B)$。

$\varnothing$ 是不动点；由 $X \subseteq c(X) \subseteq X$，$X$ 也是。若 F_i 都是不动点，单调性给出

$$\bigcap_i F_i \subseteq c\left(\bigcap_i F_i\right) \subseteq \bigcap_i c(F_i) = \bigcap_i F_i,$$

所以任意交仍是不动点。有限并仍是不动点则直接由有限并规则得到。这样我们确实得到一个闭集族，从而得到拓扑。

还需要确认这个拓扑的闭包就是原来的 c。由幂等性，$c(A)$ 是闭集，并包含 A；若闭集 F 包含 A，则单调性给出 $c(A) \subseteq c(F) = F$。因此 $c(A)$ 正是包含 A 的最小闭集。最后，任何以 c 为闭包算子的拓扑，其闭集都只能是这些不动点，故拓扑唯一。 □

如果问题首先给出的是一个集合中哪些点有开邻域留在里面，就更适合使用内部算子。内部与闭包的差别只在取补集的方向：把补集闭包，再取补集，就是原集合的内部。因而不必重新作一次构造，只需把刚才的四条规则逐条取补。

定理 4.1.4 (内部算子)**.** 映射 $i : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ 是唯一一个拓扑的内部算子，当且仅当 $i(X) = X$、$i(A) \subseteq A$、$i(A \cap B) = i(A) \cap i(B)$ 和 $i(i(A)) = i(A)$ 成立。

证明. 将定理 4.1.3 用于 $c(A) = X \setminus i(X \setminus A)$。由 De Morgan 公式，两组四条规则相互转化，且开集恰为 i 的不动点。 □

还有一种情形：我们最先知道的是每一点允许怎样的局部变化，于是直接指定各点的邻域族。对于固定的 x，邻域应包含 x，放大邻域仍是邻域，有限个邻域相交也还是邻域。但这些逐点规则还不够，它们没有把不同点的邻域联系起来。

真正的邻域 U 包含某个开集 V，而 V 内每一点都把 U 看作邻域。因此需要增加相容条件：在 x 的某个更小邻域内，所有点都认可 U 是自己的邻域。下面最后一条表达的正是这件事。

定理 4.1.5 (邻域系). 集族 $\mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{P}(X)$ 是唯一一个拓扑的邻域系，当且仅当满足：$X \in \mathcal{N}(x)$；每个成员包含 x；$\mathcal{N}(x)$ 向上封闭且对有限交封闭；对每个 $U \in \mathcal{N}(x)$，存在 $V \in \mathcal{N}(x)$，使所有 $y \in V$ 都满足 $U \in \mathcal{N}(y)$。

证明. 对一个已有的拓扑，前面各条由邻域的定义成立；若 U 是 x 的邻域，选开集 V 满足 $x \in V \subseteq U$，则对每个 $y \in V$，U 都是 y 的邻域，这就给出了相容条件。

反过来，从满足这些条件的集族出发，规定集合 G 开，当且仅当对每个 $x \in G$ 都有 $G \in \mathcal{N}(x)$。空集条件是空真，X 由假设开；并集的开性来自向上封闭，有限交的开性来自邻域族对有限交封闭。因此这些集合构成拓扑。

我们还要证明，指定的邻域没有在这个过程中改变。设 $U \in \mathcal{N}(x)$，考虑

$$W = \{y \in X : U \in \mathcal{N}(y)\}.$$

由于每个邻域包含自己的中心，$x \in W \subseteq U$。为使 U 成为真正的拓扑邻域，只差证明 W 开。对 $y \in W$，相容条件给出 $V_y \in \mathcal{N}(y)$，使 $z \in V_y$ 时有 $U \in \mathcal{N}(z)$，即 $V_y \subseteq W$。向上封闭性于是给出 $W \in \mathcal{N}(y)$。这对每个 $y \in W$ 成立，所以 W 开。

反方向，若 U 包含这个拓扑中的一个开邻域 G，则 $G \in \mathcal{N}(x)$，再由向上封闭性知 $U \in \mathcal{N}(x)$。两种邻域完全相同。开集又恰好是每一点的邻域，所以这样的拓扑只能有一个。 □

接下来把子集 $Y \subseteq X$ 本身当作空间。比如在平面里研究一个圆，圆上的点仍用平面开区域来接近，但开区域中圆外的点不应算进新空间。因此只保留 $Y \cap U$，其中 U 是母空间开集。这与度量子空间的球 $B_Y(y, r) = Y \cap B_X(y, r)$ 完全一致。

定义 4.1.6 (子空间拓扑). 对 $Y \subseteq X$，子空间拓扑定义为 $\mathcal{O}|_Y = \{Y \cap U : U \in \mathcal{O}\}$。

取相对补集可知，其中的闭集形如 $Y \cap F$，这里 F 是母空间中的闭集。因此

$$\operatorname{cl}_Y A = Y \cap \operatorname{cl}_X A, \qquad \operatorname{int}_X A \subseteq \operatorname{int}_Y A \quad (A \subseteq Y).$$

第一个等式可以通过邻域判定理解：Y 中 x 的相对邻域与 A 相交，等价于 X 中 x 的每个邻域与 A 相交，因为 $A \subseteq Y$。内部的包含关系则可能严格，单点子空间的例子已在第 3.1 节见过。若 Y 本身开，则 $Y \cap U$ 在 X 中也开，所以相对开集仍是母空间开集。若 Y 闭，同理可知相对闭集在 X 中仍闭；没有这两个假设就不能直接得出相应结论。对 $Y = \{0\} \cup \{1/n : n \geq 1\} \subseteq \mathbb{R}$，每个非零点两侧都有空隙，因而单点集 $\{1/n\}$ 在 Y 中开。若相对开集包含 0，它必须包含 $Y \cap (-\varepsilon, \varepsilon)$，所以也包含所有足够大的 n 所对应的 $1/n$。反过来，包含 0 且只漏掉有限个 $1/n$ 的集合，确实能在 0 周围容纳这样的

相对邻域，其余点又都孤立，因而开。对圆 $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$，小的平面开邻域在圆上截出开弧，圆上的相对开集可以写成这些开弧的并。图 4.1 提醒我们：圆弧在平面中没有内部，却在圆自身中是开区域。我们以后还会在收敛与商空间构造中遇到这两个例子。

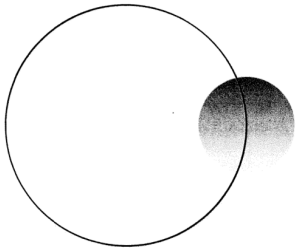


图 4.1: 圆上的开弧是圆与母空间中某个开邻域的交。

4.2 连续映射与同胚

有了开集与邻域，我们已经可以表述“让 x 附近的点映到 $f(x)$ 附近”，即使两边没有距离也一样。给定 $f(x)$ 的邻域 V，希望能在 x 附近选一个邻域 U，使 $f(U) \subseteq V$。若想一次表达所有点处的这个要求，就检查 $f^{-1}(V)$ 是否仍开；这里使用逆像，是因为它准确记录了哪些定义域中的点满足目标开集给出的条件。

定义 4.2.1 (连续性)**.** 若对每个开集 $V \subseteq Y$，逆像 $f^{-1}(V)$ 都开，则称映射 $f : X \to Y$ *连续*。若对 $f(x)$ 的每个邻域 V，存在 x 的邻域 U，使 $f(U)$ 包含于其中，则称映射在 x 处连续。

下面的等价条件让我们可以根据具体问题，选择最方便的拓扑描述。

定理 4.2.2 (连续性的等价判定)**.** 对映射 $f : X \to Y$，下列条件等价：连续；闭集的逆像为闭集；在每一点处连续；对每个 $A \subseteq X$ 都有 $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$；对每个 $B \subseteq Y$ 都有 $f^{-1}(B^\circ) \subseteq (f^{-1}(B))^\circ$。

证明. 开集与闭集的逆像条件由

$$f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$$

相互转化。若开集的逆像开，对 $f(x)$ 的邻域 V，取其中的开邻域 V°，则 $f^{-1}(V^\circ)$ 是 x 的开邻域，且映入 V，故映射逐点连续。

若映射逐点连续，要证 $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$，固定 $x \in \overline{A}$。对 $f(x)$ 的任意邻域 V，选 x 的邻域 U 使 $f(U) \subseteq V$。闭包判定给出 $a \in U \cap A$，于是 $f(a) \in V \cap f(A)$。这说明每个 V 都遇到 $f(A)$，故 $f(x) \in \overline{f(A)}$。

反过来，若闭包条件成立，给定闭集 $F \subseteq Y$ 并令 $A = f^{-1}(F)$，则

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq F,$$

所以 $\overline{A} \subseteq A$，即闭集的逆像闭。至此，前四个条件构成了完整的等价链。

若 f 连续，$f^{-1}(B^\circ)$ 是包含于 $f^{-1}(B)$ 的开集，因而包含于它的内部。反过来，把内部条件用于开集 B，就得到

$$f^{-1}(B) \subseteq (f^{-1}(B))^\circ \subseteq f^{-1}(B),$$

所以 $f^{-1}(B)$ 开。这也证明了最后一个条件与连续性等价。 □

恒等映射与常值映射都连续。连续映射的复合也连续，因为

$$(gf)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W)).$$

考虑一个取值始终在 $Y \subseteq X$ 中的映射 f。判断它连续时，把陪域写成 Y 或写成 X，不应改变结果。例如曲线始终落在圆上时，用圆弧考察它，与把圆弧视为平面开集截出的部分来考察它，应当一致。子空间拓扑正好实现这一要求。

命题 4.2.3 (子空间的映射性质)**.** $Y \subseteq X$ 上的子空间拓扑，是使包含映射 $i : Y \hookrightarrow X$ 连续的最粗拓扑。对任意 $f : Z \to Y$，f 连续当且仅当 $if : Z \to X$ 连续。

证明. 若包含映射 i 连续，则对 X 中每个开集 U，$i^{-1}(U) = Y \cap U$ 必须在 Y 中开。所以任何使 i 连续的拓扑，都至少包含所有子空间开集；而这些集合本身已经构成拓扑，故子空间拓扑就是其中最粗的一个。

若 f 连续，则 if 由复合的连续性知连续。反过来，若 if 连续，对 Y 中的任意开集 $Y \cap U$ 有

$$f^{-1}(Y \cap U) = (if)^{-1}(U),$$

右边开，故 f 连续。 □

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow^{if} & \downarrow{\scriptstyle i} \\ & & X \end{array} \tag{4.2.1}$$

交换图 4.2.1 中，两条从 Z 到 X 的路径是同一个映射；等式 $i \circ f = if$ 使上述逆像计算成立。特别地，将连续映射的陪域限制为其像，仍得到连续映射。这里改变的是陪域上的开集描述，而不是任何一个点的函数值。

前面构造函数时经常先在几段上分别写公式。要把它们粘成连续映射，首先必须在重叠部分给出同一个值，这才有一个定义在整个 X 上的映射 f。接下来的问题是：各片上连续是否足以推出整体连续？若这些片是开集，任意多片都可以；若是闭集，有限多片也可以。两种情形分别对应开集对任意并封闭、闭集对有限并封闭。

引理 4.2.4 (粘贴引理)**.** 若 X 有一个开覆盖，使 $f : X \to Y$ 在每个成员上的限制都连续，则 f 连续。对有限闭覆盖，结论同样成立。

证明. 对开覆盖 U_i，每个 $(f|_{U_i})^{-1}(V)$ 都在 U_i 中开，因而在 X 中开；它们的并正是 $f^{-1}(V)$。对有限闭覆盖 F_i 及闭集 $A \subseteq Y$，各集合 $(f|_{F_i})^{-1}(A)$ 都在 X 中闭，其有限并即为 $f^{-1}(A)$。 □

闭覆盖中的有限性不能直接去掉：$\mathbb{R}$ 被其单点闭集覆盖，任何映射在单点上的限制都连续，但任意映射当然未必连续。这也说明证明必须利用覆盖成员的具体性质，而不是只看它们合起来是否覆盖整个空间。

在欧氏空间中已经使用过同胚，这一定义可以原样推广：满足 $gf = 1$ 与 $fg = 1$ 的连续映射 f, g 互为同胚。

定义 4.2.5 (开映射、闭映射与嵌入)**.** 将开集映成开集的映射称为*开映射*，将闭集映成闭集的映射称为*闭映射*。若映射 $f : X \to Y$ 限制陪域后得到的 $X \to f(X)$ 是关于子空间拓扑的同胚，则称它为*嵌入*。

连续性控制的是逆像，开映射和闭映射控制的则是像；一般映射中，这些是不同条件。但对双射，$f(U)$ 恰好是逆映射 $f^{-1} : Y \to X$ 对 U 的逆像。因此 f 为开映射等价于 f^{-1} 连续；用闭集判定得到同样的结论。于是，连续双射是同胚，当且仅当它是开映射，也当且仅当它是闭映射。嵌入允许陪域还有别的点：只要求在实际像 $f(X)$ 上，这一对应及其逆都连续。特别地，每个嵌入都是单射，子空间的包含映射总是嵌入。包含映射 $Y \hookrightarrow X$ 为开映射，当且仅当 Y 在 X 中开：必要性只需考察 Y 自身，充分性则用开子空间的相对开集仍开。闭映射的判定同理，等价于 Y 闭。映射 $t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ 从 $\mathbb{R}$ 到 S^1 连续且开。给定 $\mathbb{R}$ 中的开集，在其中每一点周围选长度小于 1 的开区间，其像是圆上的开弧；全部这些弧的并就是原开集的像，所以像开。这个映射将相差整数的点映到同一点，故虽然连续且开，却不是同胚。

为了证明两个空间不同胚，与其逐一排除所有可能的映射，不如寻找一个同胚保持的性质。

定义 4.2.6 (紧性与可分性)**.** 若每个开覆盖都有有限子覆盖，则称空间*紧*。若存在可数稠密子集，则称空间*可分*。

这两个性质都传给连续像。具体地，设 $f : X \to Y$ 连续且满射。若 X 紧，对 Y 的开覆盖 $\{V_i\}$ 取逆像，得到 X 的开覆盖 $\{f^{-1}(V_i)\}$。选出有限子覆盖后，满射性保证相应的有限个 V_i 覆盖 Y，故 Y 紧。若 X 有可数稠密子集 D，则 $f(D)$ 仍可数，而且

$$Y = f(X) = f(\overline{D}) \subseteq \overline{f(D)} \subseteq Y,$$

所以它在 Y 中稠密。对任意连续映射，也可把陪域限制为其像来应用这些结论。特别地，同胚的两个空间要么都紧，要么都不紧；可分性也一样，因而它们都是拓扑不变量。例如 $[0, 1]$ 在通常拓扑下紧，而 $\mathbb{R}$ 的开覆盖 $\{(-n, n) : n \geq 1\}$ 没有有限子覆盖，所以两者不同胚。通常的 $\mathbb{R}$ 可分，稠密集可取 $\mathbb{Q}$；赋予可数补拓扑的 $\mathbb{R}$ 却不可分，因为其中每个可数子集都是闭的真子集，不可能稠密。同一个底集选取不同拓扑，因而可能具有不同的不变量。

4.3 基、子基与邻域基

为了指定一个拓扑，逐一列出全部开集通常很困难。度量空间已经给出一个更经济的办法：先知道所有开球，再把它们任意相并，就得到全部开集。我们希望把这件事抽象出来，同时保留一个局部检查方法——对开集中的任一点，都能在里面找到指定的一小块开集。

定义 4.3.1 (基). 若每个开集都是开集族 $\mathcal{B}$ 中若干成员的并，则称 $\mathcal{B}$ 为拓扑的一个基。等价地，对开集 U 及 $x \in U$，存在 $B \in \mathcal{B}$ 满足 $x \in B \subseteq U$。

现在反过来，先给一族子集 $\mathcal{B}$，再宣布它们的任意并为开集。任意并的封闭性自动成立，但还要检查全空间与有限交。前者要求这些集合覆盖 X；后者不要求两基本集合的交本身仍在 $\mathcal{B}$ 中，只要求它在每一点附近还能由更小的基本集合填满。

命题 4.3.2 (由基生成拓扑). 集族 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ 是某个拓扑的基，当且仅当它覆盖 X，并且对 $B_i \in \mathcal{B}$ 及 $x \in B_1 \cap B_2$，存在 $B_3 \in \mathcal{B}$ 使 $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$。所确定的拓扑唯一。

证明. 若 $\mathcal{B}$ 已是基，全空间必须是基本开集之并，所以覆盖条件成立。对 $x \in B_1 \cap B_2$，这个交是开集，故基的局部性质给出 $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$。

反过来，取 $\mathcal{B}$ 中成员的全部任意并组成 $\mathcal{O}$。空并给出 $\varnothing$，覆盖条件给出 X，再取任意并仍然属于 $\mathcal{O}$。若 $U, V \in \mathcal{O}$，对 $x \in U \cap V$ 选 $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ 使 $x \in B_1 \subseteq U$、$x \in B_2 \subseteq V$；加细条件给出 $x \in B_3 \subseteq U \cap V$。因此 $U \cap V$ 是所有这类 B_3 的并，仍属于 $\mathcal{O}$。有限交可由二元交归纳得到，于是 $\mathcal{O}$ 确为拓扑。

按构造，$\mathcal{B}$ 是这个拓扑的基。任何以 $\mathcal{B}$ 为基的拓扑，都只能是 $\mathcal{B}$ 的成员的任意并，所以拓扑唯一。 □

例 4.3.3 (后面将用到的基). 度量空间的全体开球构成基。有理端点开区间构成通常 $\mathbb{R}$ 的可数基。区间 $[a, b)$ 构成 *Sorgenfrey* 直线 $\mathbb{R}_\ell$ 的基；矩形 $[a, b) \times [c, d)$ 构成 Sorgenfrey 平面 $\mathbb{R}_\ell^2$ 的基。在 $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ 上，对互素正整数 a, b，令 $D_{a,b} = \mathbb{N}^+ \cap \{ak + b : k \in \mathbb{Z}\}$。这些互素剩余类也构成一个基。先有 $D_{1,1} = \mathbb{N}^+$，保证覆盖；若 $q \in D_{a,b} \cap D_{c,d}$，则一个正整数 m 属于这个交，当且仅当 $m - q$ 同时被 a, c 整除，故

$$D_{a,b} \cap D_{c,d} = D_{\operatorname{lcm}(a,c),q}.$$

又因 $\gcd(q, a) = \gcd(q, c) = 1$，有 $\gcd(q, \operatorname{lcm}(a, c)) = 1$，所以右边仍是允许的基本集合。

在最后这个拓扑中，对素数 p，集合 $p\mathbb{N}^+$ 闭，因为其补集是模 p 的其余剩余类的并。若素数只有有限个，则它们的倍数集之并 $\mathbb{N}^+ \setminus \{1\}$ 闭，从而 $\{1\}$ 开；但每个基本开集都无限，矛盾。这个矛盾来自两件互不相容的事：有限多个素数会迫使单点 $\{1\}$ 开，而我们构造的每个非空开集都包含一个无限算术级数。因此素数必有无穷多个。[1]

基已经比全体开集容易描述，不过有时我们更想从一些简单约束出发。例如实直线上的开区间可以由一条左射线和一条右射线相交得到。于是可以只指定射线，把有限个约束同时成立这一步交给有限交，再把开区域交给任意并。

定义 4.3.4 (子基). 若集族 $\mathcal{S}$ 的所有有限交构成基，则称它为一个子基，这里包括空交 X。

给定任意子集族，先取其所有有限交，连空交 X 也计入。这些集合覆盖 X，两个有限交再相交仍是有限交，故满足命题 4.3.2。然后取任意并，就得到包含原集族的最

[1] 素数集在这一拓扑中稠密，等价于互素算术级数中的 Dirichlet 定理；这里不需要这一数论结果。

小拓扑。这里的唯一性指这个生成的最小拓扑，而不是说只有一个拓扑能够包含原集族。由于逆像保持有限交与任意并，要验证 f 连续，只需检查陪域的每个子基本开集的逆像是否开。若改用子空间 $Y \subseteq X$，对 $U = \bigcup_\alpha B_\alpha$ 有 $Y \cap U = \bigcup_\alpha (Y \cap B_\alpha)$，所以 $\{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ 是子空间的一组基。例如，$a \in \mathbb{Q}$ 对应的两类射线 $(-\infty, a), (a, \infty)$ 构成 $\mathbb{R}$ 的子基；$a \in \mathbb{R}$ 对应的射线 $(-\infty, a), [a, \infty)$ 构成 $\mathbb{R}_\ell$ 的子基。

若只考察某个固定点 x 附近的连续性与收敛，就不必记录离 x 很远的基本开集，只需知道足以加细它的每个邻域的一族集合。度量空间中的 $B(x,1), B(x,1/2), \dots$ 正是这样一个可数的局部名单。不过“每个点有自己的可数名单”与“整个空间共用一份可数名单”不同：前者允许名单随点变化，后者要求全体基本开集一起可数。这就引出两条可数性公理。

定义 4.3.5 (邻域基与两条可数性公理)**.** x 的**邻域基**是一个邻域族，使 x 的每个邻域都包含其中某个成员。若每一点都有可数邻域基，则称空间**第一可数**；若空间有可数基，则称它**第二可数**。

这些条件决定了何时可以只使用可数构造。

定理 4.3.6 (可数基、稠密集与度量)**.** 第二可数空间第一可数且可分。每个度量空间都第一可数；度量空间第二可数，当且仅当它可分。

证明. 设 $\mathcal{B}$ 是可数基。对每个 x，从中取出所有包含 x 的成员，便得到可数邻域基，所以空间第一可数。再从每个非空的 $B \in \mathcal{B}$ 中选一点，得到可数集 D。每个非空开集都包含一个非空基本开集，故都遇到 D，所以 D 稠密。

在度量空间中，$\{B(x, 1/n) : n \geq 1\}$ 总是 x 的可数邻域基，因此第一可数。要从可分性得到第二可数性，设 D 是可数稠密子集。我们试着只允许球心来自 D、半径来自 $\{1/n : n \geq 1\}$，这样所得球族可数；还需证明限制球心后不会遗漏任何局部开集。

给定开集 U 及 $x \in U$，取 $B(x,r) \subseteq U$，再选 n 使 $2/n < r$。稠密性保证能选 $a \in D \cap B(x, 1/n)$，于是

$$x \in B(a, 1/n) \subseteq B(x, 2/n) \subseteq U.$$

因此 $\{B(a, 1/n) : a \in D, n \geq 1\}$ 是可数基。逆命题已由第一段证明。 □

将基与子空间取交可知，第一、第二可数性都传给子空间。可分性传给开子空间，只需将可数稠密集与开子空间取交；但它未必传给闭子空间。

例 4.3.7 (可数性公理与可分性的反例)**.** Sorgenfrey 直线第一可数且可分，其邻域基可取 $[x, x + 1/n)$，稠密集可取 $\mathbb{Q}$。但它不第二可数：从任意基中为每个 x 选择 $x \in B_x \subseteq [x, x+1)$。若 $x < y$ 而 $B_x = B_y$，则 $x \in B_y \subseteq [y, y+1)$，矛盾。因此不同的 x 必给出不同的 B_x，任何基都至少有不可数多个成员。由定理 4.3.6，它不可度量化。Sorgenfrey 平面可分，因为每个非空基本矩形都遇到 $\mathbb{Q}^2$。但其闭反对角线 $L = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ 不可数且离散，故不可分。先看 $(x, -x) \in L$：矩形 $[x, x+\varepsilon) \times [-x, -x+\varepsilon)$ 与 L 的交只有这一点，因为两个坐标都不减，而它们的和仍要为 0。再看 L 外一点 (a, b)。若 $a + b > 0$，以它为左下角的任何小基本矩形都保持坐标和为正；若 $a + b < 0$，取 $2\varepsilon < -(a + b)$，相应矩形的坐标和始终为负。这证

明 L 的补集开，故 L 闭。图 4.2 中实线的两条边被保留，正是反对角线上每一点能被单独截出的原因。离散空间的稠密子集必须包含每一点，所以这个不可数的闭子空间不可分。不可数集 X 上的有限补拓扑可分：选一个可数无限子集 D，任何非空开集只漏掉有限个点，因而都遇到 D。但它不第一可数。固定 x，假设有可数邻域基 $N_1, N_2, \ldots$。每个 N_n 都包含一个有限补开邻域，所以 $X \setminus N_n$ 有限，$\bigcup_n (X \setminus N_n)$ 因而可数。选

$$y \in X \setminus \left(\{x\} \cup \bigcup_n (X \setminus N_n) \right).$$

则 y 属于每个 N_n，但 $X \setminus \{y\}$ 是 x 的邻域，并不包含任何 N_n，与邻域基的定义矛盾。这个例子进一步说明，可数稠密集无法替代可数邻域基。

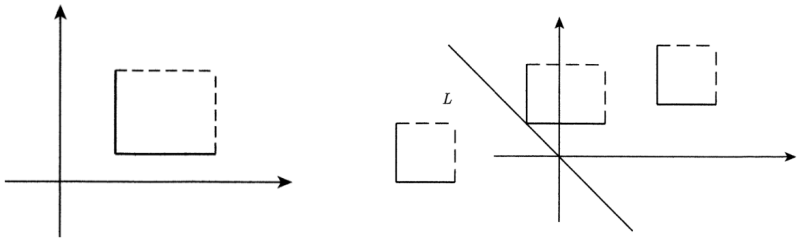


图 4.2: Sorgenfrey 基本矩形与闭离散的反对角线。实线边包含在矩形中，虚线边不包含在内。

4.4 拓扑与收敛

度量空间中，我们在 $A \cap B(x, 1/n)$ 中逐次选点，就得到趋于闭包点 x 的序列。这个方法为什么有效？并不只是因为半径趋于零，更因为任意一个邻域最终都会包含这些小球。换句话说，$B(x, 1/n)$ 构成了可数邻域基。

于是，第一可数性应当足以沿用这个选点过程；若邻域没有这样的可数名单，按自然数顺序选出的点却可能照顾不到全部邻域。我们先把两种情形分清，再考虑应该怎样修改指标。若 $x_n \in A$ 且 $x_n \to x$，则每个 x 的邻域最终包含 x_n，从而与 A 相交，所以 $x \in \overline{A}$；这一方向不需要可数性假设。反过来，若 x 有可数邻域基 $U_1, U_2, \ldots$，令 $V_n = U_1 \cap \cdots \cap U_n$，使邻域逐层缩小。对 $x \in \overline{A}$，每个 $A \cap V_n$ 非空，选 $a_n \in A \cap V_n$。任意邻域 U 包含某个 U_k，而 $n \geq k$ 时有 $a_n \in V_n \subseteq U_k \subseteq U$，所以 $a_n \to x$。在不可数集 X 的可数补拓扑中，情形就不同了。若 $x_n \to x$，令 $S = \{x_n : n \geq 1\} \setminus \{x\}$，则 S 可数，所以 $X \setminus S$ 是 x 的开邻域。序列最终必须留在这个邻域里，而它在其中唯一可能的取值就是 x。因此，每个收敛序列最终都等于自己的极限。

这样，任何子集都包含其中所有收敛序列的极限。然而不可数真子集在这个拓扑中并不闭，甚至其闭包是整个 X。所以序列判定把本来不同的情况混在了一起，无法恢复这里的闭包与开集。

我们希望仍然从每个邻域中取一个点，但不再把全部邻域强行排成 $U_1, U_2, \ldots$。直接让邻域作为指标，并规定更小的邻域是“更后”的阶段，就可以同时照顾全部邻域。

这样的指标未必线性排列：两个邻域可能互不包含。但它们的交仍是邻域，给出一个同时比两者更后的阶段。回想证明收敛时，我们只需要把有限多个“从此以后”的要

求同时满足，并不需要每两个指标都能比较大小。因而下面只要求任意两个指标有共同上界。

定义 4.4.1 (网)**.** 非空预序集 $(D,\preceq)$ 若任意两个元素都有共同上界，则称为定向集。X 中的网是映射 $\xi: D\to X$。若存在 d_0，使所有 $d\succeq d_0$ 都满足 $\xi(d)\in U$，则称网最终在 U 中；若对每个 d_0，存在 $d\succeq d_0$ 使 $\xi(d)\in U$，则称网常在 U 中。若网最终在 x 的每个邻域中，则称它收敛到 x；若它常在该点的每个邻域中，则称 x 为其聚点。

自然数集 $\mathbb{N}$ 是定向集，所以序列是网的特例。一个集合的全体有限子集按包含关系排序也定向，因为两个有限集的并同时包含两者；这适合描述“已经处理了有限多个条件”的阶段。$\mathcal{N}(x)$ 则按反包含关系排序：$U\preceq V$ 表示 $V\subseteq U$，共同更后阶段可以取 $U\cap V$。对固定区间的全部带标记分割，也可以规定网格越小指标越后，即 $P\preceq Q$ 当且仅当 $\|Q\|\le\|P\|$。不同分割的网格可能相同，所以这里自然出现预序而非偏序；它们对应的 Riemann 和就组成一个网，收敛要求所有足够细的带标记分割都给出接近同一个值的和。“最终在 U 中”要求越过某一阶段后再也不离开；“常在 U 中”只要求无论走到多后面，总还能找到进入 U 的项。聚点使用后一种条件，所以比指定一个极限要弱。在平庸空间中，每个点只有全空间这一种邻域，因此每个点都是每个网的极限；在离散空间中，单点集本身就是邻域，故收敛意味着最终等于极限。特别地，一般拓扑中的极限暂时不能保证唯一。

网弥补了序列的不足：现在每个闭包点都可以由某个实际收敛的网得到。

定理 4.4.2 (用网判定闭包与连续性)**.** 点 x 属于 $\overline{A}$，当且仅当存在 A 中的网收敛到 x。映射 $f: X\to Y$ 连续，当且仅当它保持所有网的极限。

证明. 设 $x\in\overline{A}$。对每个 $U\in\mathcal{N}(x)$，选择 $a_U\in A\cap U$，以反包含关系排列这些指标。给定邻域 V，只要指标 U 在 V 之后，就有 $U\subseteq V$，从而 $a_U\in V$。所以网 $U\mapsto a_U$ 收敛到 x。反过来，若一个 A 中的网收敛到 x，每个邻域最终包含网中的项，因而都与 A 相交，故 $x\in\overline{A}$。

若 f 连续且 $\xi\to x$，对 $f(x)$ 的邻域 V，取 x 的邻域 U 使 $f(U)\subseteq V$。原网最终在 U 中，像网就最终在 V 中，所以 $f\xi\to f(x)$。

反过来，若 f 保持所有网的极限，对 $x\in\overline{A}$ 应用第一部分选出的 A 中的网，就得到 $f(A)$ 中一个趋于 $f(x)$ 的网。因此 $f(x)\in\overline{f(A)}$，即 $f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$，再用定理 4.2.2 即得连续性。 □

对序列，选子列时要求指标严格递增；它保证我们一直向后走，不会只在原序列的前几项里反复取值。对网，指标未必线性排列，因此我们保留真正需要的性质：重新选取的指标必须最终越过原网的每一个阶段。这里使用的约定不要求重新选指标的映射单调，但要求“最终都在某阶段之后”，而不只是“总能找到一项在那之后”。例如 $h(2n)=2n$、$h(2n+1)=0$ 的取值虽然无界，却会不断返回起点，不满足下面的要求。

定义 4.4.3 (子网)**.** 若定向集之间的映射 $h: E\to D$ 满足：对每个 $d\in D$，存在 e_0，使所有 $e\succeq e_0$ 都有 $h(e)\succeq d$，则称它*共尾*。网 $\xi: D\to X$ 的子网是由这样的 h 得到的复合 $\xi h: E\to X$。

若原网在 d_0 之后都位于 U，共尾性保证子网从某个阶段开始只取 d_0 以后的项，所以子网也最终在 U 中。因此，原网的每个极限仍是每个子网的极限。序列的子网却未必是通常的子列：新指标可以是其他定向集，即使仍取自然数，所选指标也未必严格递增。

现在希望从一个聚点 x 出发，选出真正趋于它的子网。选项时有两个要求必须同时追踪：原指标要不断向后，邻域要不断缩小。因此我们把“邻域”和“已选原指标”合起来作为新指标。

命题 4.4.4 (聚点与收敛子网)**.** 一点是某个网的聚点，当且仅当该网有子网收敛到该点。

证明. 若子网 $\xi h : E \to X$ 收敛到 x，给定原指标 d_0 和 x 的邻域 U。共尾性给出一个阶段，过后 $h(e) \succeq d_0$；收敛性又给出一个阶段，过后 $\xi(h(e)) \in U$。在两阶段的共同上界处，这两件事同时成立。因此原网在任意靠后的阶段都能进入 U，故 x 是聚点。

反过来，设 x 是 $\xi : D \to X$ 的聚点。令

$$E = \{(U, d) : U \in \mathcal{N}(x),\ \xi(d) \in U\},$$

规定 $(U, d) \preceq (V, e)$ 当且仅当 $V \subseteq U$ 且 $d \preceq e$。为了证明 E 定向，给定 $(U, d), (V, e)$，先在 D 中取 $a \succeq d, e$，再由聚点条件选 $b \succeq a$ 使 $\xi(b) \in U \cap V$。那么 $(U \cap V, b)$ 就是共同上界。

令 $h(U, d) = d$。对任意 $d_0 \in D$，$(X, d_0) \in E$；凡在这个指标之后的 (U, d) 都有 $d \succeq d_0$，所以 h 共尾。再给定 x 的邻域 U，选 d 使 $\xi(d) \in U$。在 (U, d) 之后，所用邻域全部包含于 U，故对应子网的值全部落在 U 内。这证明 $\xi h \to x$。 □

既然网能识别每个闭包点，就也能识别开集。这里不是另加一个收敛公理，而是把“每一点都有邻域留在集合内”翻译成网最终是否留在其中。子集 U 开，当且仅当每个收敛到 U 中一点的网都最终在 U 中。若 $x \in U \setminus U^\circ$，则在每个邻域 V 中选择 $V \setminus U$ 的一点，所得网收敛到 x，却不满足上述条件。

还可以把刚才的关系反过来使用。若先指定一族集合，希望它们都开，那么凡是收敛到其中一点的网，就必须最终进入相应集合；若先指定一些“网收敛到某点”的规则，那么可接受的开集就必须遵守这些规则。下面用同一个符号 $\#$ 记这两个方向的操作，输入的类型会告诉我们正在使用哪一个方向。

定义 4.4.5 (集合族与收敛规则的对应)**.** 对 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$，令 $\mathcal{A}^\#$ 为所有二元组 (ξ, x) 构成的类，其中 ξ 最终在每个包含 x 的 $A \in \mathcal{A}$ 中。对由二元组 (ξ, x) 构成的类 $\mathcal{C}$，令 $\mathcal{C}^\#$ 为满足下述条件的集合 U 构成的族：若 $(\xi, x) \in \mathcal{C}$ 且 $x \in U$，则 ξ 最终在 U 中。

将定义中的条件展开可得：$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}^\#$ 表示每一对 $(\xi, x) \in \mathcal{C}$ 都对每个包含 x 的 $A \in \mathcal{A}$ 满足最终进入的要求；这恰好又是说每个 $A \in \mathcal{A}$ 都属于 $\mathcal{C}^\#$。因此

$$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}^\# \iff \mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}^\#.$$

两种运算都反转包含关系：要遵守的集合越多，允许的收敛对就越少；要求尊重的收敛对越多，允许的开集也越少。此外，$\mathcal{C}^\#$ 总是拓扑。$\varnothing$ 的要求为空真，X 的要求自动成立。若 $x \in \bigcup_i U_i$，选一个包含 x 的 U_i，相应网最终进入它，便最终进入并集。若 $x \in U_1 \cap U_2$，

分别得到进入两集合的阶段，再取共同上界，就保证以后一直在交集中。这里也看到了为何需要定向性，以及为何通常只保证有限交。由前面的网对开集判定，对任意拓扑 $\mathcal{O}$ 有 $(\mathcal{O}^{\#})^{\#}=\mathcal{O}$。因此，$(\mathcal{A}^{\#})^{\#}$ 恰为 $\mathcal{A}$ 生成的拓扑。一方面，由上面的等价式取 $\mathcal{C}=\mathcal{A}^{\#}$，得到 $\mathcal{A}\subseteq(\mathcal{A}^{\#})^{\#}$。另一方面，若拓扑 $\mathcal{O}$ 包含 $\mathcal{A}$，反转两次包含关系给出

$$\mathcal{O}^{\#}\subseteq\mathcal{A}^{\#},\qquad(\mathcal{A}^{\#})^{\#}\subseteq(\mathcal{O}^{\#})^{\#}=\mathcal{O}.$$

所以这个双重操作给出的正是包含 $\mathcal{A}$ 的最小拓扑，而不是某个额外加细的拓扑。特别地，$\mathcal{A}=(\mathcal{A}^{\#})^{\#}$ 当且仅当 $\mathcal{A}$ 已经是拓扑。

给出任意收敛规则后，上一段总能生成一个拓扑，但这个拓扑可能认可更多的收敛对。我们真正希望的是：指定的规则与拓扑收敛恰好一致。为此需要限制原来的收敛规则。前两条容易预见：常值网应收敛，取子网也不应破坏收敛。第三条要求不收敛时可以保留一个始终无法再趋于该点的子网。最后一条处理两层逼近：若先用 $\xi(d)$ 逼近 x，再分别用 $\eta_d(e)$ 逼近各个 $\xi(d)$，应能把这些过程合成一个趋于 x 的网。乘积中的一个元素 h 为每个 d 选定内层阶段；用全部这些选择作指标，才能同时照顾各内层网所需的不同阶段。

定理 4.4.6 (拓扑收敛类)**.** 设 $\mathcal{C}$ 是由网与点的二元组 (ξ,x) 组成的类，以下“收敛”均指 $(\xi,x)\in\mathcal{C}$。$\mathcal{C}$ 恰为某个拓扑的全部收敛对，当且仅当满足下列四条：

1. 取值恒为 x 的网收敛到 x；
2. 收敛到 x 的网的每个子网都收敛到 x；
3. 若一个网不收敛到 x，则它有一个子网，该子网的任何子网都不收敛到 x；
4. 若 $\xi:D\to X$ 收敛到 x，且对每个 d，网 $\eta_d:E_d\to X$ 收敛到 $\xi(d)$，则对角网

$$D\times\prod_{d\in D}E_d\longrightarrow X,\qquad(d,h)\longmapsto\eta_d(h(d))$$

收敛到 x。这里使用乘积预序：$(d,h)\preceq(d',h')$ 当且仅当 $d\preceq d'$ 且对每个 $a\in D$ 都有 $h(a)\preceq h'(a)$。

证明. 先设规则来自一个拓扑。常值网与子网两条已由定义知道。若 ξ 不收敛到 x，就存在邻域 U，使原网常在 $X\setminus U$ 中。把指标限制到

$$E=\{d\in D:\xi(d)\notin U\}$$

并使用原预序。E 是定向的：在两个指标的共同上界之后，还能再选一个属于 E 的指标；包含映射 $E\to D$ 也共尾。于是限制网是子网，且其任何子网都不进入 U，不可能趋于 x，得到第三条。

验证第四条时，固定 x 的邻域 U，取开集 V 满足 $x\in V\subseteq U$。选 d_0 使 $d\succeq d_0$ 时有 $\xi(d)\in V$。对每个这样的 d，V 是 $\xi(d)$ 的邻域，故可选 $h_0(d)\in E_d$，使 $e\succeq h_0(d)$ 时有 $\eta_d(e)\in V$；其余坐标任意选值。凡 $(d,h)\succeq(d_0,h_0)$ 都满足 $\eta_d(h(d))\in V$，从而对角网趋于 x。

反过来，设四条规则成立。我们的路线是先从这些极限构造闭包，再检查所得拓扑是否恰好具有原来的收敛规则。定义

$$c(A) = \{x : \text{存在取值于} A \text{ 的网按} \mathcal{C} \text{ 收敛到} x\}.$$

因为指标集非空，空集中没有网，故 $c(\varnothing) = \varnothing$；常值网给出 $A \subseteq c(A)$，而定义直接给出单调性。

对 $x \in c(A \cup B)$，取一个在 $A \cup B$ 中按 $\mathcal{C}$ 收敛到 x 的网。若它最终在 A 中，限制到该尾部就是取值于 A 的子网；否则它常在 B 中，按上一段对 E 的构造得到取值于 B 的子网。由第二条，所取子网仍按 $\mathcal{C}$ 收敛到 x，所以 $x \in c(A) \cup c(B)$。另一包含由单调性得到，故 $c(A \cup B) = c(A) \cup c(B)$。

若 $x \in c(c(A))$，先取 $c(A)$ 中一个按 $\mathcal{C}$ 收敛到 x 的网。它的每一项又是 A 中某个网的极限，于是第四条给出一个取值于 A、仍收敛到 x 的对角网。因此 $c(c(A)) \subseteq c(A)$；另一包含由扩张性得到。现在四条闭包公理均成立，定理 4.1.3 给出以 c 为闭包算子的拓扑。

还剩下最关键的一步：两种收敛必须相同。首先设 ξ 按 $\mathcal{C}$ 收敛到 x。若它不按新拓扑收敛，就有 x 的开邻域 U，使它常在闭集 $F = X \setminus U$ 中。取一个完全位于 F 的子网，由第二条知该子网仍按 $\mathcal{C}$ 收敛到 x。因而 $x \in c(F) = F$，与 $x \in U$ 矛盾。故 $\mathcal{C}$ 收敛蕴含拓扑收敛。

最后，设 ξ 按新拓扑收敛到 x，却不按 $\mathcal{C}$ 收敛。由第三条，存在子网 $\eta : D \to X$，其任何子网都不按 $\mathcal{C}$ 收敛到 x。但 η 仍按拓扑收敛到 x。对每个 $d \in D$，其尾部

$$T_d = \{\eta(a) : a \succeq d\}$$

的闭包包含 x：任意 x 的邻域都包含足够靠后的项，也就遇到 T_d。所以 $x \in c(T_d)$，可取一个网 $\zeta_d : E_d \to T_d$ 按 $\mathcal{C}$ 收敛到 x。

对 D 上取值恒为 x 的网及这些 ζ_d 应用第四条，得到

$$\theta : D \times \prod_{d \in D} E_d \to X, \qquad \theta(d, h) = \zeta_d(h(d)),$$

按 $\mathcal{C}$ 收敛到 x。另一方面，每个 $\theta(d, h)$ 属于 T_d，所以可以选择 $q(d, h) \succeq d$ 使 $\eta(q(d, h)) = \theta(d, h)$。给定 d_0，只要乘积指标的第一坐标 $d \succeq d_0$，就有 $q(d, h) \succeq d_0$；故 q 共尾，$\theta = \eta q$ 是 η 的子网。这与 η 的选取矛盾。两种收敛因而完全一致。 □

第五章

紧 Hausdorff 空间（一）

前面已经把连续性与收敛放到一般拓扑空间中讨论，但极限是否存在、是否唯一，仍是两件不同的事。本章先用紧性保证每个网都能找到收敛子网，再用 Hausdorff 条件保证极限唯一。将这两个条件放在一起，我们还会得到闭映射判定、闭集之间的分离，以及不依赖度量的 Baire 性质。

5.1 紧空间

在度量空间中，我们已经用序列研究过紧性：无论怎样选取一列点，总能抽出收敛子列。现在离开度量空间，序列未必足以探测所有邻域，因而应当先回到只涉及开集的定义，再用网把它重新解释成收敛性质。这样既保留了有限子覆盖带来的便利，也能看清度量空间中的结论为什么成立。对 $A \subseteq X$，若每个覆盖 A 的母空间开集族都有有限子族仍覆盖 A，就称 A 为紧子集。这里不要求这些开集包含在 A 中：相对开集都可写成 $A \cap U$，所以这一说法等价于 A 在子空间拓扑下紧。

开覆盖的好处是容易沿映射搬运。若 $f : X \to Y$ 连续且 X 紧，给定 $f(X)$ 的开覆盖，把各成员取逆像就得到 X 的开覆盖；选出有限个逆像之后，相应的原开集便覆盖 $f(X)$。因此紧空间的连续像紧。若 F 是紧空间 X 的闭子集，则在覆盖 F 的开集族中加入 $X \setminus F$，得到 X 的开覆盖；取有限子覆盖再去掉这一补集，即知 F 也紧。这两个论证都只用了紧性的定义，不需要任何分离性。

为了把覆盖条件与极限联系起来，我们将它取补。一个开覆盖没有有限子覆盖，意味着任意有限个开集的并都遗漏了一点；换成闭补集，就是每个有限交都非空。有限阶段总能找到点，紧性将保证这些要求可以同时满足。

定义 5.1.1 (有限交性质)**.** 若一个集族的每个有限子族的交都非空，则称它具有有限交性质；这里空交规定为母集。

定理 5.1.2 (紧性的闭集判定)**.** 空间紧，当且仅当每个具有有限交性质的闭集族都有非空交。

证明. 设 X 紧，闭集族 $(F_i)_{i \in I}$ 有有限交性质。若 $\bigcap_i F_i = \varnothing$，则 $X = \bigcup_i (X \setminus F_i)$；有限子覆盖会给出某个空的有限交，矛盾。反过来，若开覆盖 (U_i) 无有限子覆盖，那么闭集族 $(X \setminus U_i)$ 有有限交性质，却因 (U_i) 覆盖 X 而总交为空，同样矛盾。空空间也满足结论：按照定义，它没有具有有限交性质的集族。 □

现在看一个网 $\xi : D \to X$。记 d 之后的尾部为 $T_d = \{\xi(e) : e \succeq d\}$。聚点 x 的要求是：无论邻域取得多小、指标走得多远，仍能在这个邻域里找到后面的项。这恰好表示

每个邻域都与每个 T_d 相交，即

$$\operatorname{adh}\xi = \bigcap_{d\in D} \overline{T_d}.$$

右边正是一个闭集族的交。更关键的是，这些尾部并非彼此无关：给定有限个指标，总有一个指标不早于它们，于是相应尾部同时包含在先前的各尾部中。

定理 5.1.3 (紧性的网判定)**.** 下列条件等价：X 紧；每个网都有聚点；每个网都有收敛子网。

证明. 若 X 紧，由上述观察，闭集族 $(\overline{T_d})$ 有限交性质，因而总交非空。这就得到一个聚点；命题 4.4.4 再把它变成收敛子网的极限。反过来，收敛子网的极限是原网的聚点，所以后两个条件等价。

还需从网的聚点恢复紧性。给定有有限交性质的闭集族 $\mathcal{F}$，我们希望构造一个网，使它走到后面时逐渐满足更多的条件 $x \in F$。令 $\mathcal{C}$ 为 $\mathcal{F}$ 的所有有限交，包括空交 X，并取

$$D = \{(C, x) : C \in \mathcal{C},\ x \in C\}, \qquad (C, x) \preceq (C', x') \iff C' \subseteq C.$$

有限交性质保证每个 C 非空；用 $C_1 \cap C_2$ 即可找到任意两个指标的共同后继，所以这是一个定向指标集。定义 $\xi(C, x) = x$。对于每个 $F \in \mathcal{F}$，当指标中的有限交已经包含条件 F 后，后面的项全在 F 中。因此任何聚点都属于闭集 F：否则其开补集将是一个再也遇不到网的尾部的邻域。由假设取一个聚点，它便属于 $\bigcap \mathcal{F}$。定理 5.1.2 给出紧性。 □

这解释了为什么网适合一般紧空间：尾部的有限相容性正好对应紧性的有限交性质。在欧氏空间中，前面关于序列的结论已经足够，于是得到熟悉的两个定理。

定理 5.1.4 (Heine–Borel 定理与最值定理)**.** $\mathbb{R}^N$ 的子集紧，当且仅当它有界且闭。非空紧空间上的每个连续映射 $f : X \to \mathbb{R}$ 都取得最大值与最小值。

证明. 合用定理 2.2.2 与定理 3.3.3，得到第一条。对第二条，连续像 $f(X)$ 是 $\mathbb{R}$ 中的非空紧集，因而有界且闭。令 $a = \sup f(X)$。上确界的定义说明任意 a 的邻域都遇到 $f(X)$，所以 $a \in \overline{f(X)} = f(X)$；下确界同理。像集中的这两个值对应于定义域中取得最值的点。 □

什么时候仍能只使用序列？一方面，可数邻域基使我们能够按 $1, 2, \ldots$ 逐步逼近一个聚点；另一方面，可数的全局基使任意开覆盖都能缩成可数开覆盖。第二可数性同时提供了这两点。

定理 5.1.5 (第二可数空间中的三种紧性)**.** 在第二可数空间中，紧性、序列紧性与可数紧性等价；可数紧性是指每个可数开覆盖都有有限子覆盖。

证明. 先设 X 紧。把任意序列看成网，取其聚点 x。将 x 的可数邻域基的前 k 项取交，得到递减邻域基 (V_k)。聚点性质保证：选定 n_{k-1} 后，仍有 $n_k > n_{k-1}$ 使 $x_{n_k} \in V_k$。对 x 的任意邻域，某个 V_k 已包含其中，以后的子列项都落在它里面，故 $x_{n_k} \to x$。

若 X 序列紧，而可数开覆盖 (U_n) 没有有限子覆盖，可取 $x_n \notin \bigcup_{i\le n} U_i$。设某子列 $x_{n_k} \to x$，并取 m 使 $x \in U_m$。收敛要求子列最终进入 U_m，但当 $n_k \ge m$ 时构造又要求 $x_{n_k} \notin U_m$，矛盾。因此序列紧蕴含可数紧。

最后设 X 可数紧。给定任意开覆盖，对可数基中每个包含在某个覆盖成员内的基本开集 B，选一个这样的成员 U_B。这些 U_B 构成可数子覆盖：任意点先属于某个覆盖成员，再属于其中的一个基本开集。由可数紧性取有限子覆盖，即得紧性。 □

没有可数性条件时，上面两个缩减步骤未必能够实行。第 6.2 节将构造一个紧而非序列紧的空间，说明这种区别不能省略。

5.2 Hausdorff 空间

紧性保证每个网都有收敛子网，却没有说明这个子网会不会同时收敛到两个点。在度量空间中，我们会围绕两个不同点取两个不相交的小球：一个网不可能最终同时进入这两个球。去掉距离以后，真正起作用的是两个点能否用邻域分开。

定义 5.2.1 (Hausdorff 空间)**.** 若任意两个不同的点都有不相交的邻域，则称空间为 *Hausdorff 空间*，或称它满足 T_2 分离性。

命题 5.2.2 (Hausdorff 性与极限唯一性)**.** 空间为 Hausdorff 空间，当且仅当每个网至多有一个极限。

证明. 若 $x \neq y$ 有不交邻域 U, V，一个同时收敛到 x, y 的网将最终属于 U，又最终属于 V。取两个起始指标的共同后继，就要求其后的项位于空集 $U \cap V$，矛盾。

反过来，若 x, y 不能分离，则每个 $U \in \mathcal{N}(x)$ 与每个 $V \in \mathcal{N}(y)$ 都相交。我们让两个邻域同时缩小：将 $\mathcal{N}(x) \times \mathcal{N}(y)$ 按各坐标的反包含关系排序，在每个 $U \cap V$ 中选一点 $z_{U,V}$。一旦第一坐标缩进 x 的某个给定邻域，以后各项都在该邻域内，所以这个网收敛到 x；对第二坐标作同样观察，又知它收敛到 y。 □

Hausdorff 性传给子空间，只需把两个不交的母空间邻域与子空间取交。度量空间也都是 Hausdorff 的：对 $x \neq y$，半径 $d(x, y)/3$ 的两个开球由三角不等式知不相交。

极限唯一性还解释了一个熟悉的现象：连续函数在稠密集上的值确定它在全空间上的值。直接用开集证明，可以避免为每个点重新选一个网。若 $f, g : X \to Y$ 连续且 Y 为 Hausdorff 空间，令 $E = \{x : f(x) = g(x)\}$。当 $x \notin E$ 时，为 $f(x), g(x)$ 取不交开邻域 U, V，则 $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ 是 x 的开邻域，并且与 E 不交。于是 E 闭。特别地，若 E 包含一个稠密子集，它就必须等于 X。

到目前为止，我们只能分离两个点。若把其中一点换成紧集 K，可以先分别分离 x 与各个 $y \in K$；问题在于，所有含 x 的邻域相交后未必仍是邻域。紧性恰好允许我们只保留有限个。

引理 5.2.3 (点与紧集的分离)**.** Hausdorff 空间中，紧集 K 与点 $x \notin K$ 有不相交的开邻域。特别地，每个紧子集都闭。

证明. 若 $K = \varnothing$，取 $\varnothing$ 和 X 即可。否则，对每个 $y \in K$ 取不交开集 $U_y \ni y$、$V_y \ni x$。用紧性选出覆盖 K 的 $U_{y_1}, \ldots, U_{y_n}$，令

$$U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i}, \qquad V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i}.$$

U 包含 K，V 包含 x，并且 V 避开每个 U_{y_i}，所以 $U \cap V = \varnothing$。每个 K 外的点都有这样的开邻域 $V \subseteq X \setminus K$，故 K 闭。 □

这个结论把紧性与闭集联系起来。在连续映射下，闭集的像通常未必闭；但若闭集先因紧性变成紧集，其像也紧，而 Hausdorff 性又使这个像闭，就得到了一条完整的推理链。

定理 5.2.4 (从紧空间到 Hausdorff 空间的映射)**.** 从紧空间到 Hausdorff 空间的连续映射是闭映射，因此二者之间的连续双射是同胚。特别地，若 $\mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{O}_1$，$(X, \mathcal{O}_1)$ 紧，而 $(X, \mathcal{O}_2)$ 为 Hausdorff 空间，则 $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$。

证明. 若 F 在定义域中闭，则 F 紧，连续像 $f(F)$ 紧，再由引理 5.2.3 知它在陪域中闭。故 f 为闭映射。若 f 还是双射，闭映射条件正好保证 f^{-1} 连续，得到同胚。

最后考虑恒等映射 $\mathrm{id} : (X, \mathcal{O}_1) \to (X, \mathcal{O}_2)$。由于 $\mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{O}_1$，它连续；前述结论使其逆也连续，于是 $\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}_2$。两个拓扑相同。 □

因此，在紧空间与 Hausdorff 空间之间构造同胚时，往往只需找到一个连续双射，而无需再写出逆映射的邻域证明。

我们也需要辨认较弱的分离条件。不能用两个不交邻域分开点，并不表示开集完全无法区别它们：有时一个开集包含其中一点而不包含另一点，但反方向做不到；有时两个方向都能做到，邻域却仍会相交。

定义 5.2.5 (T_0 与 T_1)**.** 若不同点有不同的邻域系，则称空间为 T_0 空间；若不同点的邻域系在包含关系下互不可比，则称空间为 T_1 空间。

观察

$$x \in \overline{\{y\}} \iff x \text{ 的每个邻域都包含} y.$$

因此，两点的单点闭包相同，恰好表示开集不能区别这两点。于是 T_0 等价于 $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}} \Rightarrow x = y$。而 T_1 要求对 $x \neq y$，能找到含 x 不含 y 的邻域；这等价于每个 $\{y\}$ 都闭。由定义可见 $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$，并且三者都遗传到子空间。

这些条件确实有差别。Sierpiński 空间与赋予右拓扑的实直线都能用开集区别两点，因而为 T_0，但区别具有方向性，所以不满足 T_1。无限集上的有限补拓扑中，每个单点集闭；它还紧，因为非空开覆盖中任取一个非空成员，所剩有限个点各用一个成员覆盖即可。然而两个非空开集总相交，故它不是 Hausdorff 空间。

也可以用网表达这些弱分离条件。T_0 等价于：对两个不同点，存在一个网收敛到其中之一而不收敛到另一点。若开集 U 含 x 不含 y，常值网 y 就不收敛到 x；反之，邻域系完全相同的两点必是同一批网的极限。T_1 则等价于每个点都是某个网的唯一极限：在 T_1 空间中，常值网 y 的极限只能是 y。若 $x \in \overline{\{y\}}$，任何收敛到 y 的网也收敛到 x，因为 x 的每个开邻域都是 y 的邻域。因此每个点都能成为唯一极限，会排除 $x \neq y$ 时的这种关系。

5.2.1 sober 空间

在非 Hausdorff 空间中，单点闭包可能含有多个点。不过它仍有一个特殊性质：如果被两个闭集的并覆盖，那么原来的点必落在其中一个闭集里，整个单点闭包便也落在这个

闭集里。我们可以反过来问：具有这种性质的闭集，是否一定来自某个点？如果来自一个点，这个点是否唯一？这就引出 sober 性；下面沿用这一名称。

定义 5.2.6 (sober 性)**.** 若非空闭集 F 满足：对闭集 A, B，由 $F \subseteq A \cup B$ 可以推出 $F \subseteq A$ 或 $F \subseteq B$，则称它*不可约*。若每个不可约闭集都可唯一地写成某个点 x 的闭包 $\overline{\{x\}}$，则称空间为 *sober* 空间。

换言之，不可约闭集不能写成两个真闭子集的并。取补集还可得到一个常用判定：若两个开集都与 F 相交，那么它们的交也与 F 相交。前面的观察证明了每个单点闭包不可约；若空间 sober，单点闭包相同的点必须相同，故 sober 性蕴含 T_0。

在 Hausdorff 空间中，一个不可约闭集不能含有两个不同点，因为围绕这两点的不交开邻域会违反上述开集判定。因此其不可约闭集恰为单点集，空间自然 sober。逆方向不能加强成 T_1：Sierpiński 空间的两个非空闭集各有唯一的生成点，因而 sober，却不满足 T_1。无限集的有限补拓扑给出另一种区别：整个空间不可约，但单点集都闭，所以全空间不是任何单点的闭包，它并不 sober。

如果某个不可约闭集缺少生成它的点，可以尝试把这个闭集本身当成一个新点。这样也要把原来的点 x 送到 $\overline{\{x\}}$；原来拓扑无法区分的点将被认同。剩下的问题是怎样规定这些新点的拓扑。对原空间闭集 A，最自然的候选是所有包含在 A 中的新点：

$$s(A) = \{F : F \text{ 是} X \text{ 的不可约闭集，且} F \subseteq A\}.$$

定理 5.2.7 (sober 化)**.** X 的全体不可约闭子集构成一个 sober 空间 $s(X)$，其闭集为各 $s(A)$。映射 $\eta_X(x) = \overline{\{x\}}$ 连续；它是单射当且仅当 X 满足 T_0，是同胚当且仅当 X 为 sober 空间。对每个连续映射 $f : X \to Y$，若 Y 为 sober 空间，则存在唯一的连续映射 $\bar{f} : s(X) \to Y$，使 $\bar{f}\eta_X = f$。

证明. 先检查闭集系。空集对应 $s(\varnothing) = \varnothing$，母集 X 对应整个新空间，并且

$$s(A \cup B) = s(A) \cup s(B), \qquad s\Big(\bigcap_i A_i\Big) = \bigcap_i s(A_i).$$

第一式正是不可约性的作用；第二式直接来自包含关系。又因为

$$x \in A \iff \overline{\{x\}} \in s(A),$$

有 $\eta_X^{-1}(s(A)) = A$，所以 η_X 连续，且 $A \mapsto s(A)$ 是保持并、交与包含关系的一一对应。

利用这个对应，$s(A)$ 不可约当且仅当 A 不可约。若它们不可约，则 A 本身也是新空间中的一个点。新空间中闭集 $s(B)$ 包含点 A，恰好意味着 $A \subseteq B$；因此

$$\overline{\{A\}}^{\,s(X)} = s(A).$$

若另一个点 F 也有这一闭包，就有 $s(F) = s(A)$，从而 $F = A$。这证明 $s(X)$ 为 sober 空间。η_X 的单射性恰好是 T_0 条件；若 X sober，则它还是满射，而且对每个闭集 A 都有 $\eta_X(A) = s(A)$，故它为同胚。反过来，sober 性由同胚保持，所以 η_X 为同胚也蕴含 X sober。

接下来构造 $\bar{f}$。若 F 不可约，则 $\overline{f(F)}$ 仍不可约：当它包含于两个闭集的并时，对这两个闭集取逆像，再用 F 的不可约性即可。由于 Y sober，存在唯一一点 $\bar{f}(F)$ 使

$$\overline{\{\bar{f}(F)\}} = \overline{f(F)}.$$

这说明新加入的点应当送到哪里。对 Y 的闭集 B，上述等式给出

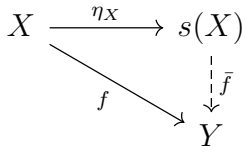
$$\bar{f}(F) \in B \iff f(F) \subseteq B \iff F \subseteq f^{-1}(B),$$

故 $\bar{f}^{-1}(B) = s(f^{-1}(B))$ 闭，所定义映射连续。连续性还给出 $\overline{f(\overline{\{x\}})} = \overline{\{f(x)\}}$，所以 $\bar{f}(\eta_X(x)) = f(x)$。

最后验证唯一性，而不能只用稠密集上的一致性，因为 Y 未必 Hausdorff。对不可约闭集 F 有

$$\overline{\eta_X(F)}^{\,s(X)} = s(F) = \overline{\{F\}}^{\,s(X)}.$$

若 g 连续且 $g\eta_X = f$，由 $F \in \overline{\eta_X(F)}$ 得 $g(F) \in \overline{f(F)}$；由每个 $\eta_X(x)\,(x \in F)$ 属于 $\overline{\{F\}}$，又得 $f(F) \subseteq \overline{\{g(F)\}}$。因此 $\overline{\{g(F)\}} = \overline{f(F)}$，$Y$ 中生成点的唯一性便给出 $g(F) = \bar{f}(F)$。 □



(5.2.1)

图 5.2.1 中，从 X 直接经 f 到 Y，与先取单点闭包再经 $\bar{f}$ 到 Y 是同一映射。虚线的存在与唯一性说明：向任何 sober 空间作连续映射时，这些新增的生成点都只能有刚才构造的像。

单点闭包还有另一个用途：它把“每个含 x 的开集都包含 y”这种有方向的关系写成一个序。

定义 5.2.8 (特殊化序). 定义 $x \le y$ 当且仅当 $x \in \overline{\{y\}}$。

这个关系自反；若 $x \le y \le z$，每个含 x 的开集先包含 y，再包含 z，故 $x \le z$，所以它是预序。两个方向同时成立恰好表示单点闭包相同，故反对称性恰好等价于 T_0。每个开集都是上集：包含 x 且 $x \le y$，就一定包含 y。

在 sober 空间中，这个序还允许对任意非空定向子集 D 取上确界。为看出候选点从哪里来，先考察 $\overline{D}$。若两个开集都与 $\overline{D}$ 相交，它们也都与 D 相交；取交点 $d_1, d_2 \in D$，再取 D 中的共同上界 d。开集是上集，所以 d 同时属于这两个开集。由开集判定，$\overline{D}$ 不可约，因而可写成 $\overline{\{a\}}$。每个 $d \in D$ 满足 $d \le a$；若 b 是 D 的任意上界，则 $D \subseteq \overline{\{b\}}$，取闭包后得 $a \le b$。所以 a 正是所求上确界。

5.3 正规性与 Baire 性质

上一节用紧性将点与点的分离提升为点与紧集的分离。若空间本身紧且 Hausdorff，闭集都是紧集，我们便能再做一次有限覆盖论证，将两个不交闭集分开。先把这两种分离要求独立命名；它们在不紧的空间中也有意义。

定义 5.3.1 (正则空间与正规空间). 若一点与不包含它的闭集有不相交的开邻域，则称空间正则。若两个不相交闭集有不相交的开邻域，则称空间正规。这里二者都不额外包含 T_1 条件。正则 T_0 空间称为 T_3 空间；正规 T_1 空间称为 T_4 空间。

实际构造中，比起同时写出两个不交开集，我们更常从一个给定邻域出发，把它缩小后连同闭包一起留在原邻域中。正则性恰好等价于

$$x \in U,\ U \text{ 开} \quad \Longrightarrow \quad x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U \quad \text{对某个开集} V.$$

若能将 x 与 $X \setminus U$ 分别放入不交开集 V, W，则 $\overline{V} \subseteq X \setminus W \subseteq U$。反过来，给定闭集 F 不含 x，对 $U = X \setminus F$ 作这种收缩，V 与 $X \setminus \overline{V}$ 就分开了 x 和 F。换言之，正则性使每个邻域都包含一个闭邻域。

把点换成闭集，同样的取补步骤说明正规性等价于

$$F \subseteq U,\ F \text{ 闭},\ U \text{ 开} \quad \Longrightarrow \quad F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U \quad \text{对某个开集} V.$$

我们后面反复构造嵌套开集时，用的就是这个收缩形式。

正则 T_0 空间一定 Hausdorff：对 $x \neq y$，T_0 保证存在一个开集含其中一点而不含另一点。设 $x \in U$、$y \notin U$，将 U 缩成 $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ 后，V 与 $X \setminus \overline{V}$ 就是不交邻域。另外，正规 T_1 空间中单点集闭，因而正规性蕴含正则性。于是

$$T_4 \Longrightarrow T_3 \Longrightarrow T_2 \Longrightarrow T_1 \Longrightarrow T_0.$$

定理 5.3.2 (紧空间中的正规性)**.** 紧 Hausdorff 空间是 T_4 空间。更一般地，紧正则空间正规。

证明. 给定不交闭集 A, B，它们都紧。对每个 $a \in A$，取不交开集 U_a, V_a，分别包含 a 与 B：Hausdorff 情形用引理 5.2.3，正则情形直接用定义。再用 A 的紧性选取有限个 U_{a_i} 覆盖 A，则 $\bigcup_i U_{a_i}$ 包含 A，$\bigcap_i V_{a_i}$ 包含 B，二者不交。若某个闭集为空，直接取空集与全空间即可。Hausdorff 空间已经满足 T_1，所以第一种情形得到 T_4。 □

对于度量空间，可以用距离函数做得更具体。我们想找一个连续函数，使它在 A 上取 0，在 B 上取 1；如果找到了，取靠近 0 和靠近 1 的两个不交区间的逆像，就能把 A, B 分开。点到集合的距离给出了这种函数的原料。

引理 5.3.3 (点到集合的距离)**.** 对度量空间中的非空集合 A，函数 $d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$ 是 1-Lipschitz 的，且 $\overline{A} = \{x : d(x, A) = 0\}$。

证明. 对每个 $a \in A$，三角不等式给出 $d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$，取下确界得 $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$。交换 x, y 即得

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

而 $d(x, A) = 0$ 表示每个 $\varepsilon > 0$ 都存在 $a \in A$ 使 $d(x, a) < \varepsilon$，这恰好是每个以 x 为中心的开球都与 A 相交，即 $x \in \overline{A}$。 □

若 A, B 是不交的非空闭集，考虑

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}.$$

分母不可能为零，否则 x 同时属于两个闭集。由引理，f 连续，在 A 上取 0，在 B 上取 1。于是 $f^{-1}([0, 1/3))$ 与 $f^{-1}((2/3, 1])$ 是所求不交开邻域，这里的区间是在 $[0, 1]$ 中的相对开集。若其中一个闭集为空，分离没有困难。因此每个度量空间都正规，结合

Hausdorff 性便得到 T_4。注意我们没有要求 A, B 之间有统一的正距离，只要求同一个点不能同时到二者距离为零。

这些分离条件之间的逆向蕴含并不成立。下面的例子还说明，正规性与稍弱的正则性在乘积下有不同表现。

例 5.3.4 (分离公理的区别与 Sorgenfrey 平面)**.** Sierpiński 空间正规，但不正则，也不满足 T_1。
Sorgenfrey 直线正规，而 Sorgenfrey 平面满足 T_3 却不正规。

先看 Sierpiński 空间。它的两个非空闭集互相包含，因而不交闭集中至少一个为空，正规性自动成立。但取闭单点集和外面的另一个点，二者不能有不交邻域，所以不正则；也不是所有单点集都闭。

对 Sorgenfrey 直线中的不交闭集 F, G，利用它们的开补集，为每个 $x \in F$ 选取避开 G 的基本区间 $[x, a_x)$，为每个 $y \in G$ 选取避开 F 的 $[y, b_y)$。这两类区间一定彼此不交：若 $x < y$ 且区间相交，则 $y < a_x$，于是 $y \in [x, a_x)$，与该区间避开 G 矛盾；$y < x$ 时同理。分别取两类区间的并，便把 F, G 分开。

在 Sorgenfrey 平面中，基本矩形既开又闭，所以每个邻域都有闭的基本邻域，空间正则；它又是 Hausdorff 空间，故满足 T_3。为了检验正规性，考虑先前已经得到的闭离散反对角线 L，其基数为 $\mathfrak{c}$。L 的每个子集都是平面中的闭集。若平面正规，那么对每个 $A \subseteq L$，可取 $A, L \setminus A$ 的不交开邻域 U_A, V_A。

关键是：可数稠密集 $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ 已经能够区别所有这些 U_A。若 $A \neq B$，交换二者后可设 $x \in A \setminus B$，则 $U_A \cap V_B$ 是包含 x 的非空开集，故含一个有理点对；这个点属于 U_A，却不属于 U_B。于是 $A \mapsto U_A \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$ 为单射。这要求

$$|\mathcal{P}(L)| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})| = \mathfrak{c},$$

与 Cantor 定理 $|\mathcal{P}(L)| > \mathfrak{c}$ 矛盾。因而 Sorgenfrey 平面不正规。

再看例 4.3.3 中的算术级数拓扑。它是 Hausdorff 的：对不同正整数 m, n，取素数 $p > \max\{m, n\}$，则 $D_{p,m}$ 与 $D_{p,n}$ 是不交基本邻域。但它不正则，具体障碍是点 1 与闭集 $2\mathbb{N}^+$ 无法分离。

事实上，1 的每个邻域都包含某个 $D_{d,1}$，再将步长改成偶数 $e = 2d$，便得到 $D_{e,1} \subseteq D_{d,1}$。若开集 V 包含全部偶数，它尤其包含 e，因而含有 e 的某个基本邻域 $D_{a,b}$。由 $e \equiv b \pmod{a}$ 与 $\gcd(a, b) = 1$，知 $\gcd(a, e) = 1$。中国剩余定理遂给出满足

$$n \equiv 1 \pmod{e}, \qquad n \equiv b \pmod{a}$$

的正整数 n。它同时落在 $D_{e,1}$ 和 V 中。因此任何 1 的开邻域都会遇到任何包含偶数集的开集，分离不可能完成。

接下来回到 Baire 定理。第 3.2 节中，无处稠与稀疏的定义只用到了闭包、内部和可数并，所以离开度量空间以后仍然适用。我们把 Baire 定理的结论本身作为一个拓扑性质。

定义 5.3.5 (Baire 空间)**.** 若可数个稠密开集的交仍稠密，则称空间为 *Baire* 空间。

这个定义等价于每个稀疏集内部为空，也等价于每个非空开集在母空间中非稀疏。确切地说，若 A_n 无处稠，则 $X \setminus \overline{A_n}$ 稠密且开；它们的交稠密，便说明 $\bigcup_n A_n$ 不能包含

非空开集。反过来，若 U_n 都稠密且开，那么 $X \setminus U_n$ 都是无处稠闭集；其并内部为空，正是 $\bigcap_n U_n$ 稠密。

Baire 性质传给开子空间。设 $V \subseteq X$ 开，$A \subseteq V$ 在 V 中无处稠。若 $\overline{A}^X$ 含有非空开集 W，由于 A 在自己的闭包中稠密，W 必与 A 相交，因而 $W \cap V$ 非空。它是包含在 $\overline{A}^V$ 中的非空相对开集，矛盾。因此 A 在 X 中也无处稠。若 V 的某个非空相对开集在 V 中稀疏，它也就在 X 中稀疏；但它因 V 开而是 X 的非空开集，与 X 的 Baire 性质矛盾。

无理数空间 $I = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 也为 Baire 空间，不过它不是 $\mathbb{R}$ 的开子空间，不能直接套用上一段。给定 I 中相对稠密开集 $G_n = I \cap O_n$，其中 O_n 在 $\mathbb{R}$ 中开。因为 I 在 $\mathbb{R}$ 中稠密，G_n 在 I 中稠密，O_n 必在 $\mathbb{R}$ 中稠密。枚举 $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \ldots\}$，对 O_n 与 $\mathbb{R} \setminus \{q_n\}$ 一起应用实数空间的 Baire 定理，得到

$$\bigcap_n G_n = \bigcap_n O_n \cap \bigcap_n (\mathbb{R} \setminus \{q_n\})$$

在 $\mathbb{R}$ 中稠密，因而在 I 中稠密。

在度量 Baire 定理的证明中，我们构造一列嵌套闭球，再用完备性得到公共点。现在没有距离，无法要求半径趋于零；但若空间紧，只要构造出非空嵌套闭集就足够。正则性的收缩形式恰好能在给定开集中放入这样的闭集。

定理 5.3.6 (紧 Hausdorff 空间的 Baire 性质)**.** 每个紧 Hausdorff 空间都是 Baire 空间。

证明. 设 U_n 为稠密开集，W 为任意非空开集。$W \cap U_1$ 非空，在其中取一点，再由正则性选取非空开集 V_1 使 $\overline{V_1} \subseteq W \cap U_1$。若已经选出 V_n，稠密性保证 $V_n \cap U_{n+1}$ 非空，再次收缩得到

$$\varnothing \neq \overline{V_{n+1}} \subseteq V_n \cap U_{n+1}.$$

因此 $(\overline{V_n})$ 是非空嵌套闭集族，具有有限交性质。由紧性，其交中存在一点；它属于 W，也属于每个 U_n。由于 W 任意，$\bigcap_n U_n$ 稠密。 □

第六章

乘积空间与商空间

有了关于紧性和分离性的工具，我们接下来构造新的空间。乘积把许多坐标放在一起，商空间则把指定的点认作同一点；两种构造都要回答同一个问题：怎样规定开集，才能让原有的映射自然地成为连续映射？本章先用初始拓扑解释乘积，再证明任意紧空间的乘积仍紧，最后通过终拓扑研究商映射与曲面的粘合。

6.1 乘积空间

对子集 $A \subseteq X$ 赋予子空间拓扑时，我们要求包含映射 $A \hookrightarrow X$ 连续。因此，每个 X 中开集的逆像都必须开；只把这些必要的开集加入，就得到了子空间拓扑。现在把一个包含映射换成一族任意映射，我们仍可以问：至少需要给定义域哪些开集，才能使这些映射全部连续？

定义 6.1.1 (初始拓扑)**.** 给定到拓扑空间的映射族 $f_i : X \to Y_i$，X 上以 $\{f_i^{-1}(U) : U \subseteq Y_i \text{ 开}\}$ 为子基的拓扑称为相应的*初始拓扑*。它是使所有 f_i 连续的最粗拓扑。

这里取子基而非直接把所有逆像当成拓扑，是因为来自不同 f_i 的逆像还需要作有限交，再取任意并。凡是使全部 f_i 连续的拓扑，都必须包含这些集合，因此“最粗”确实成立。

这个定义特别适合判断映入 X 的映射。因为 $h^{-1}(f_i^{-1}(U)) = (f_i h)^{-1}(U)$，连续性的子基判定给出第一条；网的邻域判定给出第二条：

$$h : Z \to X \text{ 连续} \iff f_i h \text{ 对每个} i \text{ 都连续},$$
$$\xi \to x \text{ 在} X \text{ 中成立} \iff f_i \xi \to f_i(x) \text{ 对任意} i.$$

第二条的反向需要注意有限性：若各坐标的网收敛，就最终进入每个给定的子基本邻域；一个基本邻域只用有限个这种条件，取有限个起始指标的共同后继，便使这些条件同时成立。

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\ h\ } & X \\ & \searrow^{f_i h} & \downarrow{\scriptstyle f_i} \\ & & Y_i \end{array} \tag{6.1.1}$$

图 6.1.1 中斜箭头是沿上边、右边的复合；当 X 取初始拓扑时，所有这些斜箭头连续，恰好足以保证 h 连续。

度量拓扑也能这样描述。对每个 $a \in X$ 考虑实值函数 $f_a(x) = d(x, a)$。三角不等式使它连续，所以这些函数生成的初始拓扑不比度量拓扑细；反过来，$B(a, r) = f_a^{-1}((-\infty, r))$，故每个开球都属于初始拓扑。两者相同。

在 $X_1\times X_2$ 中，最自然的映射是两个坐标投影 p_i。若要求它们连续，就必须使 $U_1\times X_2$ 和 $X_1\times U_2$ 开；将两者相交，得到基本矩形 $U_1\times U_2$。所以两个投影生成的初始拓扑，正是以开矩形为基的乘积拓扑。投影不仅连续，而且开：一个非空基本矩形在任一坐标上的像就是相应的开集，一般开集再取这些像的并即可。

映入乘积的映射连续，当且仅当两个坐标映射连续。尤其，若 $f_i: X_i\to Y_i$ 连续，那么 $f_1\times f_2$ 的第 i 个坐标为 f_ip_i，故它连续。下图把这一等式写了出来：

$$\begin{array}{ccc} X_1\times X_2 & \xrightarrow{f_1\times f_2} & Y_1\times Y_2 \\ {\scriptstyle p_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_i} \\ X_i & \xrightarrow[f_i]{} & Y_i. \end{array} \tag{6.1.2}$$

坐标收敛的判定立即说明两个紧空间的乘积紧。给定乘积中的一个网，先由第一因子的紧性取一个子网，使第一坐标收敛；再由第二因子的紧性，从这个子网中取子网，使第二坐标收敛。第二次取子网不会破坏已经得到的第一坐标收敛，于是两个坐标都收敛，乘积中的网也收敛。重复有限次得到有限积的紧性。对无限多个坐标，不能把“不断取子网”直接当作已有一个最终子网，下一节要专门解决这个困难。

乘积还把 Hausdorff 性转成一个闭集条件。令 $\Delta_X=\{(x,x): x\in X\}$。对 $(x,y)\notin\Delta_X$，基本矩形 $U\times V$ 避开 Δ_X，恰好等价于 $U\cap V=\varnothing$。因此

$$X \text{ 为 Hausdorff 空间} \iff \Delta_X \text{ 在} X\times X \text{ 中闭}.$$

若 $f,g: Z\to X$ 连续，它们的相等点集就是连续映射 (f,g) 对 Δ_X 的逆像，这也重新解释了上一章的相等点集判定。

我们还需要一个能把逐点邻域变成统一邻域的结果。设开集 W 包含整片 $A\times\{b\}$。对每个 $a\in A$，总能找到小矩形 $U_a\times V_a\subseteq W$；但若想在 Y 方向同时移动整片 A，就需要一个对所有 a 都有效的 b 的邻域。紧性再次让我们只取有限个 V_a 的交。

引理 6.1.2 (管形引理)**.** 若 $A\subseteq X$ 紧，$b\in Y$，且开集 $W\subseteq X\times Y$ 满足 $A\times\{b\}\subseteq W$，则存在开集 $U\supseteq A$ 和 $V\ni b$，使 $U\times V\subseteq W$。

证明. 在每个 (a,b) 周围选基本矩形 $U_a\times V_a\subseteq W$。有限个 U_{a_i} 覆盖 A，取 $U=\bigcup_i U_{a_i}$、$V=\bigcap_i V_{a_i}$。若 $(u,v)\in U\times V$，则某个 U_{a_i} 含 u，而 $v\in V_{a_i}$，故 $(u,v)\in W$。若 $A=\varnothing$，取 $U=\varnothing$、$V=Y$ 即可。 □

投影总是开映射，但不一定闭。例如闭集 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: xy=1\}$ 在第二坐标上的投影为 $\mathbb{R}\setminus\{0\}$。这里随着 y 趋于 0，所需的第一坐标逃向无穷大；若第一因子紧，这种情形就会被管形引理排除。

定理 6.1.3 (Kuratowski 投影定理)**.** 空间 X 紧，当且仅当对每个空间 Y，投影 $p_Y: X\times Y\to Y$ 都是闭映射。

证明. 先设 X 紧，$F\subseteq X\times Y$ 闭。若 $y\notin p_Y(F)$，则整片 $X\times\{y\}$ 都在开集 $(X\times Y)\setminus F$ 中。管形引理给出 y 的开邻域 V，使 $X\times V$ 与 F 不交。因而 V 避开 $p_Y(F)$，这就证明投影的像闭。

反过来，我们要从投影闭性得到闭集族的公共点。设 $\mathcal{A}$ 是有有限交性质的非空闭集族，将它扩充为包含所有有限交的集族。构造辅助空间 $Y=X\cup\{\infty\}$：让 X 的点在 Y

中全部孤立，∞ 的邻域基则规定为

$$\{\{\infty\} \cup A : A \in \mathcal{A}\}.$$

有限交性质保证这些邻域都遇到 X，所以 X 在 Y 中稠密。这个构造的目的，是把“最终进入每个 A”集中到一个新点 ∞ 附近。

令 F 为对角集合 $\{(x,x) : x \in X\}$ 在 $X \times Y$ 中的闭包。其投影包含 X，又由假设为闭集，所以包含 ∞。于是存在 x_0 使 $(x_0, \infty) \in F$。对每个 $A \in \mathcal{A}$ 与 x_0 的任意开邻域 U，矩形 $U \times (\{\infty\} \cup A)$ 都遇到原对角集合，这正表示 $U \cap A \neq \varnothing$。故 $x_0 \in \overline{A} = A$，得到 $\bigcap \mathcal{A} \neq \varnothing$。空集族的情形直接取交为 X；$X = \varnothing$ 时本来就紧。因此闭集判定给出结论。 □

6.1.1 紧映射

若把一个紧空间映到单点，其唯一纤维就是整个空间，并且这个映射当然闭。我们希望把这一情形推广到有许多纤维的映射。只要求每条纤维紧还不够，例如 $\mathbb{R} \setminus \{0\} \hookrightarrow \mathbb{R}$ 的纤维都是空集或单点，但整个定义域这个闭集的像不是闭集。需要再要求闭映射性，来控制不同纤维之间的变化。

定义 6.1.4 (紧映射)**.** 连续闭映射若每条纤维都紧，则称为紧映射。这类映射也称完全映射；这里不要求满射。

先记录一个常用的限制步骤。若 $B \subseteq Y$，令 $f_B : f^{-1}(B) \to B$ 为 f 的限制，它保留 f 的连续性、闭映射性以及紧映射性。闭映射性并不要求 B 本身闭：若 C 在 $f^{-1}(B)$ 中闭，写成 $C = F \cap f^{-1}(B)$，其中 F 在 X 中闭，则

$$f_B(C) = f(F) \cap B$$

在 B 中闭。限制前后纤维相同，所以紧纤维条件也保留。

紧映射 $f : X \to Y$ 下，紧集 K 的逆像紧。为证明这一点，给定 $f^{-1}(K)$ 的开覆盖，将其成员写成母空间开集与 $f^{-1}(K)$ 的交。对每个 $y \in K$，用有限个相应母空间开集覆盖紧纤维 $f^{-1}(y)$，记它们的并为 U_y。闭映射性使

$$V_y = Y \setminus f(X \setminus U_y)$$

成为 y 的开邻域，而且 $f^{-1}(V_y) \subseteq U_y$。所以这有限个覆盖成员不只覆盖一条纤维，还覆盖 $V_y \cap K$ 上方的所有点。再用 K 的紧性取有限个 V_y，相应有限批覆盖成员便覆盖整个 $f^{-1}(K)$。

这也给出两个立即可用的结论。紧映射的复合仍是紧映射：连续性、闭映射性由复合保持，而复合在 z 上的纤维为 $f^{-1}(g^{-1}(z))$，是紧集的逆像。若紧映射还满射，则定义域紧当且仅当陪域紧，一个方向用连续像，另一个方向用刚证明的逆像性质。

非恒定实多项式 $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 和范数映射 $\mathbb{R}^N \to [0, \infty)$ 都是紧映射。两者对有界闭区间的逆像都有界且闭，故紧。再验证闭映射性：若 F 闭而 $y_n = f(x_n) \in f(F)$ 收敛到 y，将 (y_n) 与 y 放进同一个有界闭区间，便使 (x_n) 落在一个紧集里。取收敛子列 $x_{n_k} \to x \in F$，连续性给出 $f(x) = y$；度量空间的序列闭判定说明 $f(F)$ 闭。单点的逆像当然也紧。相反，正弦映射的纤维 $\sin^{-1}(0) = \pi\mathbb{Z}$ 非紧；定义在 $\mathbb{R}$ 上的常值映射的非空纤维为整个 $\mathbb{R}$，所以二者都不是紧映射。

投影定理把紧空间刻画为“与任意空间作积后，投影仍闭”。对紧映射，也可以问：让它只作用在乘积的一个坐标上，闭性是否仍能保留？答案仍由管形引理给出。

定理 6.1.5 (紧映射的乘积判定)**.** 对连续映射 $f : Y \to Z$，下列条件等价：f 是紧映射；对每个空间 X，$f \times 1_X$ 是紧映射；对每个空间 X，$f \times 1_X$ 是闭映射。

证明. 设 f 为紧映射。为证明 $f \times 1_X$ 闭，给定闭集 $C \subseteq Y \times X$，以及不属于其像的点 (z, x)。开集 $G = (Y \times X) \setminus C$ 包含整片 $f^{-1}(z) \times \{x\}$。管形引理给出开集 $U \supseteq f^{-1}(z)$ 与 $W \ni x$，使 $U \times W \subseteq G$。由于 f 闭，

$$V = Z \setminus f(Y \setminus U)$$

是 z 的开邻域，且 $f^{-1}(V) \subseteq U$。因此 $(f \times 1_X)^{-1}(V \times W) \subseteq G$，即 $V \times W$ 避开闭集 C 的像。这证明乘积映射闭；它连续，而且在 (z, x) 上的纤维与 $f^{-1}(z)$ 同胚，所以也是紧映射。

第二个条件显然蕴含第三个。若第三个成立，先取 X 为单点空间，得 f 闭。再固定 $z \in Z$，将闭映射 $f \times 1_X$ 限制在陪域子空间 $\{z\} \times X$ 的逆像上。由前面的限制性质，所得映射仍闭；把它写成坐标，就是投影 $f^{-1}(z) \times X \to X$。这对所有 X 成立，定理 6.1.3 遂说明 $f^{-1}(z)$ 紧。因此 f 为紧映射。 □

6.2 Tychonoff 乘积定理

有限积中，我们可以依次选择子网，使每个坐标收敛。坐标有无限多个时，这个过程没有一个最后步骤；即使只逐次处理可数多个坐标，也不能未经证明就把所有子网看成同一个子网。因此要另找一种同时处理所有坐标的办法。乘积拓扑的基本邻域只限制有限个坐标，这将使开覆盖的论证比逐次选子网更合适。

先把集合与拓扑两层构造分清。对由 I 编号的集合族 X_i，定义

$$\prod_i X_i = \{x : I \to \bigcup_i X_i : x(i) \in X_i\}, \qquad x_i = x(i).$$

一个点就是为每个指标指定一个坐标。空积规定为单点集，对应唯一的空函数。选择公理断言每族非空集合的乘积非空；本文在通常的集合论框架中使用选择公理，本节末尾会交代它在乘积定理中所起的作用。

定义 6.2.1 (乘积拓扑)**.** 对拓扑空间族 X_i，$\prod_i X_i$ 上由投影 $p_i(x) = x_i$ 生成的初始拓扑称为*乘积拓扑*。标准基本开集形如

$$\prod_{j \in J} U_j \times \prod_{i \notin J} X_i, \qquad J \subseteq I \text{ 有限}, \quad U_j \subseteq X_j \text{ 开}.$$

这里的写法表示有限个坐标有额外开集条件，其余坐标完全不受限制。这一点来自子基本集合只作有限交，不能擅自换成所有坐标上的任意开集乘积。

若 $A_i \subseteq X_i$ 为子空间，将上述基本集合与 $\prod_i A_i$ 相交，得到同样有限个坐标上的相对开集条件。因此 $\prod_i A_i$ 的乘积拓扑与它作为 $\prod_i X_i$ 子空间的拓扑一致。投影连续且开：非空基本集合的投影是某个 U_i 或整个 X_i，再取并即可。初始拓扑的判定又给出：映射 $f : Z \to \prod_i X_i$ 连续当且仅当各 $p_i f$ 连续；网在乘积中收敛当且仅当每个坐标都收敛。

反过来，如果已经给出一族映射 $f_i : Z \to X_i$，就没有必要再猜测映入乘积的映射怎样定义：它的每个坐标都已被指定，唯一可能是 $\Delta_i f_i : z \mapsto (f_i(z))_i$。它连续恰好等价于所有 f_i 连续。

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\Delta_i f_i} & \prod_i X_i \\ & \searrow^{f_j} & \downarrow{\scriptstyle p_j} \\ & & X_j \end{array} \tag{6.2.1}$$

图 6.2.1 中，对每个 j 都有 $p_j \Delta_i f_i = f_j$；这些等式既决定了虚线映射的唯一性，也把它的连续性化成各坐标的连续性。

闭包也可以逐坐标计算：对任意 $A_i \subseteq X_i$，

$$\overline{\prod_i A_i} = \prod_i \overline{A_i}.$$

右边是包含 $\prod_i A_i$ 的闭集，因为它等于 $\bigcap_i p_i^{-1}(\overline{A_i})$，所以左边包含于右边。反过来，若 $x_i \in \overline{A_i}$，则 x 的每个基本邻域只要求有限个坐标落在指定开集中；这些开集各与 A_i 相交，可以在其中选取坐标，其余坐标选在相应 A_i 内，便得到邻域与 $\prod_i A_i$ 的交点。若某个 A_i 为空，两边都为空；空积时两边都是单点集。

由这些具体的基本邻域，我们可以直接检查哪些性质在乘积下保留。

命题 6.2.2 (乘积的性质)**.** 正则性及 T_0, T_1, T_2, T_3 都保持到任意乘积。第一可数性、第二可数性与可分性保持到可数乘积。可数个可度量化空间的乘积仍可度量化。

证明. 不同的乘积点总在某个坐标不同。在这个坐标中用 T_0、T_1 或 T_2 条件选取所需开集，再取投影逆像，就得到乘积中的对应分离条件。若各因子正则，给定点 x 的一个基本邻域，将它限制的有限个坐标开邻域分别收缩为 $x_j \in V_j \subseteq \overline{V_j} \subseteq U_j$。由闭包公式，相应的基本邻域的闭包仍在原邻域中，故乘积正则。结合 T_0 就得到 T_3。

对可数乘积中的固定点，从各坐标的可数邻域基中作有限坐标指定，就得到一个可数邻域基：有限指标集只有可数多个，每次有限个可数集的选择也只有可数多个。把邻域基换成各因子的全局可数基，同样得到第二可数性。

对可分性，先选各因子的可数稠密集 D_n，并固定一个点 $a \in \prod_n D_n$。只允许有限个坐标不同于 a，且变化后的坐标仍在 D_n 中，得到可数集 D。任意非空基本开集只限制有限个坐标，在这些坐标中利用 D_n 的稠密性选点，其余取 a_n，便得到 D 中的交点。含空因子时乘积为空，相应结论直接成立。

最后，给定各因子的度量 d_n，我们想将坐标距离相加。但无限和未必收敛，因此先把每项截断为不超过 1，再乘以可求和的权重：

$$d(x, y) = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} \min\{d_n(x_n, y_n), 1\}.$$

非负性、对称性与正定性直接成立。由 $\min\{a + b, 1\} \leq \min\{a, 1\} + \min\{b, 1\}$，每个截断距离仍满足三角不等式，求和后 d 也是度量。

还要验证它给出的恰好是乘积拓扑。给定 x 的基本邻域，在每个受限坐标 $j \in J$ 中选 $0 < r_j < 1$，使 $B_{d_j}(x_j, r_j) \subseteq U_j$。若 $d(x, y) < \min_{j \in J} 2^{-j} r_j$，则每个受限坐标都满足 $d_j(x_j, y_j) < r_j$，所以这个 d-球位于基本邻域内。反过来，给定 $\varepsilon > 0$，选 N 使尾和

$\sum_{n>N} 2^{-n} < \varepsilon/2$，再要求前 N 个坐标分别足够接近，使初段和小于 $\varepsilon/2$。这只限制有限个坐标，给出一个包含于 $B_d(x,\varepsilon)$ 的乘积基本邻域。两个拓扑因而相同。 □

这里没有列入正规性：两个 Sorgenfrey 直线都正规，它们的乘积却由例 5.3.4 知不正规。

例 2.1.8 中 Cantor 集的地址，也可以用乘积语言重新理解。每一步选择左段或右段，得到一个 0–1 序列；任意地址对应一列长度趋于零的嵌套闭区间，因而确定唯一一点。地址映射 $C \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 是双射。它的每个坐标在相应阶段的既开又闭子集上恒定，所以逐坐标连续。C 紧，而右边为 Hausdorff 空间，由定理 5.2.4，这个地址映射便是同胚。

现在证明任意乘积的紧性。一个一般开集可能是许多基本集合的并，而基本集合又同时约束多个坐标；若能把检验缩减到子基覆盖，每个覆盖成员就只约束一个坐标，因子的紧性便可以直接使用。下面的引理完成这个缩减。

引理 6.2.3 (Alexander 子基引理)**.** 若 X 的每个由子基 $\mathcal{S}$ 成员组成的覆盖都有有限子覆盖，则 X 紧。

证明. 假设存在没有有限子覆盖的开覆盖 $\mathcal{U}$。我们先把它扩充到不能再扩充的程度：将所有包含 $\mathcal{U}$、且仍无有限子覆盖的开集族按包含排序。链的并仍无有限子覆盖，因为任何有限子族已经位于链中的某个成员内。由 Zorn 引理，存在极大元 $\mathcal{M}$。

极大性带来两条性质。首先，若 $M \in \mathcal{M}$、$V \subseteq M$ 开，则 $V \in \mathcal{M}$，因为加入 V 不可能新产生有限子覆盖。其次，若 $U_1 \cap \cdots \cap U_n \in \mathcal{M}$，则至少一个 $U_i \in \mathcal{M}$。否则，加入每个 U_i 后都出现有限子覆盖；把这些有限子覆盖中来自 $\mathcal{M}$ 的成员收集起来，记它们的并为 M_0。每个不在 M_0 中的点都必须属于所有 U_i，于是 M_0 与 $U_1 \cap \cdots \cap U_n$ 就由 $\mathcal{M}$ 的有限个成员覆盖了 X，矛盾。

对每个 $x \in X$，取 $M \in \mathcal{M}$ 含 x，再在其中取含 x 的子基本集合的有限交。这个交由第一条属于 $\mathcal{M}$，由第二条，其某个子基本因子也属于 $\mathcal{M}$，并且包含 x。注意这里不可能只取空交 X，因为 $X \notin \mathcal{M}$。因此 $\mathcal{S} \cap \mathcal{M}$ 已覆盖 X。按假设，它有有限子覆盖，这又与 $\mathcal{M}$ 的构造矛盾。 □

引理并没有把一般开覆盖逐个替换成子基成员，而是先取一个极大失败的覆盖，再用极大性从有限交中抽出一个因子。这个步骤解释了为什么证明中需要 Zorn 引理。

定理 6.2.4 (Tychonoff 乘积定理)**.** 任意个紧空间的乘积仍紧。

证明. 空积为单点集，含空因子的乘积为空，均紧。以下设各因子非空。根据 Alexander 子基引理，只需证明：一族子基本开集若没有有限子族覆盖乘积，它根本就不能覆盖乘积。

按坐标把这些集合分类，每个成员形如 $p_i^{-1}(U)$。对固定 i，这一类所对应的 U 不可能覆盖 X_i；否则 X_i 的紧性给出有限个 U 覆盖 X_i，相应有限个柱集就覆盖整个乘积，矛盾。所以可在这些 U 的并外选一点 x_i。对所有 i 作此选择，点 $(x_i)_i$ 就不属于原集族的任何成员。因此每个子基覆盖都有有限子覆盖，乘积紧。 □

这个证明不要求各因子 Hausdorff。若它们同时 Hausdorff，乘积由命题 6.2.2 也为 Hausdorff 空间。

例 6.2.5 (紧但不序列紧)**.** 紧 Hausdorff 空间 $\{0,1\}^{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$ 中，令 $f_n(A)=1$ $(n\in A)$，而 $f_n(A)=0$ $(n\notin A)$。序列 (f_n) 没有收敛子列。

这里每个坐标由一个自然数子集 A 编号，因子 $\{0,1\}$ 取离散拓扑。给定任何子列 (f_{n_k})，可以用它自己的奇数项指标造出一个坐标

$$A=\{n_1,n_3,n_5,\dots\}.$$

在这个坐标上，$f_{n_k}(A)$ 在 1 与 0 间交替，而离散空间中的收敛序列必须最终恒定。因此这个子列在该坐标上不收敛，也就不在乘积中收敛。另一方面，各个二点因子紧且 Hausdorff，故整个乘积紧且 Hausdorff。这说明紧性的网判定不能在任意拓扑空间中换成序列判定。

6.2.1 乘积定理背后的选择原则

刚才有两处存在性值得分清：Alexander 引理用 Zorn 引理取极大覆盖，乘积定理又在每个因子中选了一个点。这些都与选择公理有关。下面补上它们之间的逻辑关系，而不把这些选择隐藏在“任取”二字中。

偏序是自反、反对称且传递的关系；链是其中任意两点可比的子集。极大元表示没有严格更大的元素，并不要求它大于其余所有元素；后者称为最大元。良序则是每个非空子集都有最小元的全序。

定理 6.2.6 (选择公理的等价形式)**.** 下列命题等价：选择公理；每个满射都有右逆；每个集合都可良序化；Zorn 引理，即每条链都有上界的偏序集必有极大元。它们还等价于任意紧空间的 Tychonoff 乘积定理。

证明. 选择公理允许从满射 $p:X\to Y$ 的每条非空纤维中选一点，得到 $s:Y\to X$ 且 $ps=\mathrm{id}_Y$。反过来，对非空集合族 (A_i)，不交并到指标集的投影 $\coprod_i A_i\to I$ 满射；它的右逆就在每个 A_i 中选了一点。所以前两个命题等价。

由 Zorn 引理可得良序化。把给定集合的所有良序子集按“作为初段扩充”排序：旧子集中的次序不能改变，新加的点必须排在它的所有点之后。一条链的并带有相容次序，仍是良序。事实上，对并集的非空子集 B，先取一个与 B 相交的链成员，在这个初段内取 B 的最小元；所有后添元素都在它之后，所以它也是 B 的最小元。Zorn 引理给出极大良序子集；如果它还缺少一个点，就能把该点添在末尾，与极大性矛盾。于是整个集合可良序化。反过来，将所有待选择集合的不交并良序化，再从每个分量取最小元，就得到选择函数。

剩下说明选择公理推出 Zorn 引理。令 $\mathcal{L}$ 为给定偏序集的全体链，按包含关系排序。它自身的每条链都有上确界，即这些链的并，空链的上确界为 $\varnothing$。若没有极大链，选择公理可为每个 $L\in\mathcal{L}$ 选一个真扩充 $F(L)\supsetneq L$。这将违反紧接着证明的 Bourbaki 不动点定理 6.2.7；该定理的证明不使用选择公理，因此这里没有循环。于是有极大链 L。按 Zorn 引理的假设，它有上界 m；若 m 上面还有严格更大的元素，就能把这个元素加入 L，矛盾。故 m 是极大元。

此前的证明已经由选择公理得到 Tychonoff 定理。反方向的困难在于：不能先假定 $\prod_i A_i$ 非空，因为那正是要证明的事。为此，在每个非空集合 A_i 中添入一个共同的新点

∞，令 $X_i = A_i \cup \{\infty\}$，取拓扑

$$\{\varnothing, A_i, \{\infty\}, X_i\}.$$

每个 X_i 都紧，因为开覆盖至多需要一个成员覆盖 A_i、另一个覆盖 ∞。乘积 $\prod_i X_i$ 则已有明确的点，即各坐标都为 ∞ 的点，无需任何选择。假定 Tychonoff 定理，乘积紧；其中闭柱集 $p_i^{-1}(A_i)$ 具有有限交性质，因为有限多个 A_i 中可以作有限次选择，其他坐标全取 ∞。于是这些闭柱集的总交非空，而该交就是 $\prod_i A_i$，故选择公理成立。这里使用的是不附加 Hausdorff 条件的完整乘积定理。 □

现在补上刚才使用的不动点结果。直观上，从 x 出发反复施行 F，会一直向上走；积累成一条链后，可以取上确界继续。但仅写出 $x, F(x), F^2(x), \ldots$ 还不够，因为它们的上确界未必立即是不动点。下面用对这两种操作封闭的最小集合，把整个过程一次组织起来。

定理 6.2.7 (Bourbaki 不动点定理)**.** 若偏序集 P 中每条链，包括空链，都有上确界，且对每个 $x \in P$ 有 $x \le F(x)$，则 F 有不动点。

证明. 称 $A \subseteq P$ 为封闭于所需操作的集合，如果 $F(A) \subseteq A$，且 A 中每条链在 P 中的上确界仍属于 A。将所有这样的集合取交，得到最小者 P_0。它存在，因为 P 本身符合条件；它包含最小元 $\bot = \sup \varnothing$。我们的目标是证明 P_0 本身就是链，然后对整条链取上确界。

为此，暂称 $x \in P_0$ 为连接点，如果对任意 $y \in P_0$，由 $y < x$ 能推出 $F(y) \le x$。固定一个连接点 x，考虑

$$A_x = \{y \in P_0 : y \le x \text{ 或} F(x) \le y\}.$$

这个集合对 F 封闭：若 $y < x$，用连接点条件；若 $y = x$，其像为 $F(x)$；若 $F(x) \le y$，则 $F(x) \le y \le F(y)$。它也对链的上确界封闭：如果链中所有成员都不超过 x，其上确界也不超过 x；否则某个成员不小于 $F(x)$，上确界也不小于 $F(x)$。空链的上确界 $\bot$ 亦属于 A_x。由 P_0 的最小性，$A_x = P_0$。因此对连接点 x 和任意 $y \in P_0$，总有

$$y \le x \quad \text{或} \quad F(x) \le y. \tag{6.2.2}$$

下面证明所有连接点构成的集合也封闭于这两种操作。若 x 是连接点且 $y < F(x)$，由式 (6.2.2) 可知 $y \le x$。当 $y < x$ 时，$F(y) \le x \le F(x)$；当 $y = x$ 时，$F(y) = F(x)$。所以 $F(x)$ 也是连接点。

若 L 是连接点构成的非空链，令 $x = \sup L$，并取 $y \in P_0$ 满足 $y < x$。必有某个 $z \in L$ 使 $y < z$。否则，对每个 z 用式 (6.2.2)，不是 $y \le z$ 就是 $F(z) \le y$；第一种情形因排除了 $y < z$ 而只能是 $y = z$，第二种情形也给出 $z \le y$。这会使 y 成为 L 的上界，与 $y < x$ 矛盾。选定这样的 z 后，由 z 的连接点性质得 $F(y) \le z \le x$，故 x 也是连接点。空链上确界 $\bot$ 的连接点条件则自动成立。

由最小性，P_0 的每个点都是连接点。于是式 (6.2.2) 表明其中任意两点可比，故 P_0 是链。令 $b = \sup P_0$。封闭性给出 $b, F(b) \in P_0$，再由 b 是上界与 $b \le F(b)$，得到 $b \le F(b) \le b$，即 $F(b) = b$。 □

这个证明没有要求 F 单调或连续；始终使用的是逐点条件 $x \le F(x)$，不能把二者混淆。另一个选择原则的推论是任意两个集合的基数可比。把所有部分单射 $f : A \to Y$

$(A \subseteq X)$ 按扩充排序，链的并仍是部分单射，所以 Zorn 引理给出极大者。若它的定义域不等于 X、像也不等于 Y，就可以各取一个未使用的点添成一对，与极大性矛盾。故它或者将整个 X 单射到 Y，或者其逆将整个 Y 单射到 X。特别地，将无限集良序化，依次选取尚未选取的最小元，就得到一个可数无限子集；无限性保证每个有限阶段后仍有可选的点。

6.3 商空间

子空间是在原空间中选取一部分点，乘积是同时记录多个坐标；商空间的出发点则是把某些点当成同一点。例如把区间两端粘起来，应当得到一个圆。集合层面的粘合很容易规定，真正需要考虑的是：粘合以后，哪些集合应该算开集？

设 E 是 X 上的等价关系，即满足自反、对称与传递性。等价类将 X 分成一个划分；反过来，每个划分也规定一个等价关系。记全体等价类为 X/E，自然映射为 $q : X \to X/E$、$q(x) = [x]$。若希望 q 连续，那么商集中的开集 V 必须满足 $q^{-1}(V)$ 在原空间中开。我们干脆将所有符合这个条件的 V 都取进来，这样得到的是使 q 连续的最细拓扑。

定义 6.3.1 (商拓扑与终拓扑). X/E 上的商拓扑由 V 开 $\iff q^{-1}(V)$ 在X 中开 确定。更一般地，对映射族 $f_i : Y_i \to X$，X 上的终拓扑由所有满足每个 $f_i^{-1}(U)$ 都开的集合 $U \subseteq X$ 组成。连续满射 $q : X \to Y$ 若使 Y 具有这一拓扑，就称为商映射。

由于逆像保持任意并与有限交，定义中的集合确实构成拓扑。它与初始拓扑的方向不同：初始拓扑把给定映射的开逆像加入定义域，终拓扑则在陪域中检查哪些集合的所有逆像已经开。

这种方向也体现在连续性判定中。从带终拓扑的 X 出发，映射 $g : X \to Z$ 连续，当且仅当各 gf_i 连续。事实上，对开集 $W \subseteq Z$，$g^{-1}(W)$ 开等价于每个 $f_i^{-1}(g^{-1}(W)) = (gf_i)^{-1}(W)$ 开。

$$\begin{array}{ccc} Y_i & \xrightarrow{f_i} & X \\ & \searrow^{gf_i} & \downarrow{\scriptstyle g} \\ & & Z \end{array} \tag{6.3.1}$$

图 6.3.1 因而告诉我们：只要逐一检查每条斜箭头，就能判断从 X 出发的 g 是否连续。

任意映射 $f : X \to Y$ 都会自然产生一个等价关系 $xEx' \iff f(x) = f(x')$。如果两个点的像已经相同，就可以先将它们粘在一起，再定义

$$\bar{f} : X/E \to Y, \qquad \bar{f}([x]) = f(x).$$

等价关系的定义保证它良定义且为单射；它满射当且仅当 f 满射。这个映射也是满足 $\bar{f}q = f$ 的唯一候选，因为 q 满射。若 f 连续，终拓扑判定立即使 $\bar{f}$ 连续。

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle q}\downarrow & \nearrow_{\bar{f}} & \\ X/E & & \end{array} \tag{6.3.2}$$

不过连续双射仍未必是同胚。若希望商空间准确恢复 Y 的拓扑，就需要 f 本身也能用逆像判定 Y 中的开集。

命题 6.3.2 (商映射的判定)**.** 连续的开满射或闭满射都是商映射。商映射的复合仍是商映射。在图 6.3.2 中，$\bar{f}$ 是到 Y 的同胚，当且仅当 f 是到 Y 的商映射。

证明. 对连续开满射 q，若 $q^{-1}(V)$ 开，则 $V = q(q^{-1}(V))$ 因 q 为开映射而开；反向是连续性。闭满射的情形对闭集使用同样论证，再取补集即可。若 $q : X \to Y$ 与 $r : Y \to Z$ 均为商映射，则

$$W \text{ 在}Z \text{ 中开} \iff r^{-1}(W) \text{ 在}Y \text{ 中开} \iff q^{-1}(r^{-1}(W)) \text{ 在}X \text{ 中开},$$

所以 rq 也是商映射。

最后，f 满射时 $\bar{f}$ 为双射。由商拓扑，$\bar{f}^{-1}(V)$ 在 X/E 中开当且仅当 $f^{-1}(V)$ 在 X 中开。因此 $\bar{f}$ 两方向都连续，恰好等价于 V 在 Y 中开当且仅当 $f^{-1}(V)$ 开，也就是 f 为商映射。若 $\bar{f}$ 是到 Y 的同胚，它当然满射，故也保证了这里所需的 f 满射。 □

例 6.3.3 (圆的两个商表示与平庸商拓扑)**.** 映射 $t \mapsto e^{2\pi i t}$ 给出 $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$；将它限制于 $[0,1]$，得到将两个端点认同后的商空间 $[0,1]/(0 \sim 1) \cong S^1$。相反，$\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ 的商拓扑为平庸拓扑。

先看 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$。指数映射是连续满射，且两个实数同像恰好表示它们相差整数。它也是开映射：对开集中的每个点，可取长度小于 1 的小区间，使指数映射将其同胚到一个开圆弧；开集的像是这些开圆弧的并。因此由命题 6.3.2 得到第一个同胚。

限制到 $[0,1]$ 后，只有两个端点具有相同的像。这个限制的像仍为整个圆，而定义域紧、陪域 Hausdorff，所以它是闭映射，进而是商映射。这就把“把区间两端粘起来”的图形直观变成了一个拓扑结论。

对于 $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$，粘合的每个等价类 $x + \mathbb{Q}$ 都在 $\mathbb{R}$ 中稠密。称 $U \subseteq \mathbb{R}$ *饱和*，如果它是等价类的并，即 $q^{-1}q(U) = U$。商空间的开集正对应原空间中的饱和开集。若非空饱和开集 U 的补集还含一点 x，则补集包含整个稠密陪集 $x + \mathbb{Q}$；但稠密集不能避开非空开集 U，矛盾。所以仅有 $\varnothing$ 与 $\mathbb{R}$ 两个饱和开集，商拓扑只能是平庸拓扑。可见粘合后的点数很多，并不保证开集还能区分它们。

终拓扑还可以把“分别连续”写成普通的连续性。考虑 $\mathbb{R}^2$ 中所有水平、竖直包含映射 $h_c(t) = (t, c)$ 与 $v_c(t) = (c, t)$。由它们生成的终拓扑恰由横截面、竖截面都开的集合组成。从带这个拓扑的 $\mathbb{R}^2$ 出发，g 连续当且仅当 $gh_c = g(-, c)$ 与 $gv_c = g(c, -)$ 对每个 c 都连续，也就是 g 分别连续。

这个拓扑包含通常拓扑，却严格更细。函数

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

沿每条水平线、竖直线都连续，所以对终拓扑连续；但 $g(t,t) = 1/2$ $(t \neq 0)$，并不趋于 $g(0,0) = 0$，故对通常拓扑不连续。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{h_c} & (\mathbb{R}^2, \tau_{\text{final}}) \\ & \searrow^{g(-,c)} & \downarrow g \\ & & Y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{v_c} & (\mathbb{R}^2, \tau_{\text{final}}) \\ & \searrow^{g(c,-)} & \downarrow g \\ & & Y. \end{array} \tag{6.3.3}$$

图 6.3.3 的两个三角形分别固定第二、第一坐标，所表示的正是上述两类复合。必须对所有 c 同时检查，才能得到终拓扑下的连续性。

商映射的分解性质也可以把等价关系本身放进图里。将 E 看成 $X \times X$ 的子空间，记两个投影为 $r_1, r_2 : E \to X$。由于等价的点有同一个商点，$qr_1 = qr_2$。而连续映射 $f : X \to Y$ 满足 $fr_1 = fr_2$，恰好表示 f 在每个等价类上恒定；因此它唯一且连续地通过 q 分解：

$$\begin{array}{ccccc} E & \underset{r_2}{\overset{r_1}{\rightrightarrows}} & X & \xrightarrow{\ q\ } & X/E \\ & & & \searrow^{f} & \downarrow{\scriptstyle \bar{f}} \\ & & & & Y. \end{array} \tag{6.3.4}$$

这称为商构造的余等化子解释：q 将两条平行箭头认同，而任何同样认同这两条箭头的连续映射，都通过 q 唯一分解。这里的新名称只是概括已经证明的性质，不再额外假设新的结论。

与乘积把坐标合在一个点中不同，和空间保留各个空间作为彼此分开的分量。集合上取带指标的不交并 $\coprod_i X_i$，拓扑上对包含映射 $\iota_i : X_i \to \coprod_i X_i$ 取终拓扑：子集开，当且仅当它与每个分量 $X_i \times \{i\}$ 的交在该分量中开。每个 ι_i 都是开嵌入。于是给定一族连续映射 $f_i : X_i \to Y$，按分量定义的映射 f 就是唯一满足 $f\iota_i = f_i$ 的连续映射。

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{\ \iota_i\ } & \coprod_j X_j \\ & \searrow^{f_i} & \downarrow{\scriptstyle f} \\ & & Y. \end{array} \tag{6.3.5}$$

图 6.3.5 的交换关系说明，只需在每个分量上给出连续映射，就能把它们拼成整个和空间上的连续映射。在定理 10.3.7 的证明中，我们还会使用这一构造。

另一个常用的商是将整个非空子集 A 压成一个点，记为 X/A。要判断自然映射 q 是否开或闭，关键是先写出集合 K 的饱和化：

$$q^{-1}q(K) = \begin{cases} K, & K \cap A = \varnothing, \\ K \cup A, & K \cap A \neq \varnothing. \end{cases}$$

如果 A 闭，闭集 K 的饱和化仍闭，商拓扑遂说明 $q(K)$ 闭，所以 q 为闭映射；若 A 开，同理 q 为开映射。没有这些条件时，两者都可能失败。例如在 $\mathbb{R}/(0,1]$ 中，闭集 $[1,2]$ 的饱和化为非闭集 $(0,2]$，所以其像不闭；开集 $(-1/2, 1/2)$ 的饱和化为非开集 $(-1/2, 1]$，所以其像不开。

6.3.1 商空间何时仍为 Hausdorff 空间

$\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ 已经说明，粘合可能破坏 Hausdorff 性。我们希望在粘合之前，直接从 $E \subseteq X \times X$ 判断商空间能否分离不同点。若商空间 Hausdorff，它的对角线闭，而 E 正是这条对角线在 $q \times q$ 下的逆像，因此 E 闭是必要条件。对紧 Hausdorff 定义域，它也充分；证明要先把 E 的闭性转换成 q 的闭性。

命题 6.3.4 (闭满射保持正规性)**.** 连续闭满射将正规空间映成正规空间，将 T_4 空间映成 T_4 空间。

证明. 设 $f : X \to Y$ 连续、闭且满射。对不交闭集 $A, B \subseteq Y$，其逆像是不交闭集，取不交开集 $U, V \subseteq X$ 分别包含它们。直接取 $f(U), f(V)$ 未必开，也未必不交；我们改为保留那些整条纤维都已落在 U 或 V 内的点，令

$$U' = Y \setminus f(X \setminus U), \qquad V' = Y \setminus f(X \setminus V).$$

因为 f 闭，U', V' 开，且分别包含 A, B。若某个 y 同时属于两者，它的非空纤维就同时包含在不交的 U, V 中，矛盾。故 Y 正规。若 X 还满足 T_1，对每个 $y \in Y$ 取 $x \in f^{-1}(y)$，闭映射性给出 $\{y\} = f(\{x\})$ 闭，所以 Y 也满足 T_1。 □

定理 6.3.5 (Alexandroff 商空间判定)**.** 设 X 为紧 Hausdorff 空间，E 为等价关系。下列条件等价：X/E 为 Hausdorff 空间；E 在 $X \times X$ 中闭；映射 $q : X \to X/E$ 闭。此时 X/E 是紧 Hausdorff 空间。

证明. 若 X/E Hausdorff，则 $E = (q \times q)^{-1}(\Delta_{X/E})$ 闭。

若 E 闭，给定闭集 $A \subseteq X$。要证 $q(A)$ 闭，由商拓扑只需证明其饱和化闭。把与 A 中至少一个点等价的所有点写出来，得到

$$q^{-1}q(A) = p_1\big(E \cap (X \times A)\big).$$

括号内是紧空间 $X \times X$ 的闭子集，故紧；它的投影紧，又因 X Hausdorff 而闭。因此 $q(A)$ 闭，q 为闭映射。

最后，若 q 闭，紧 Hausdorff 空间 X 由定理 5.3.2 为 T_4 空间。命题 6.3.4 使其闭商 X/E 也为 T_4，因而 Hausdorff。无论哪个条件成立，商空间始终是紧空间的连续像，所以还紧。 □

这里三步各用了不同工具：闭对角线、紧集投影、闭满射的分离性质。特别是最后两步不能省去定义域的紧 Hausdorff 条件后照搬。

这个判定也让乘积与商的交换变得容易。若 X, Y 紧 Hausdorff，E, F 为闭等价关系，在 $X \times Y$ 上按坐标等价，得到自然双射

$$(X \times Y)/(E \times F) \longrightarrow (X/E) \times (Y/F), \qquad [(x, y)] \longmapsto ([x], [y]).$$

它连续，因为它与商映射的复合就是连续映射 $q_X \times q_Y$。定义域紧，陪域由前述判定与乘积性质为 Hausdorff 空间，所以它是同胚。

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{\;q_X \times q_Y\;} & (X/E) \times (Y/F) \\ {\scriptstyle q}\big\downarrow & \nearrow_{\cong} & \\ (X \times Y)/(E \times F) & & \end{array} \tag{6.3.6}$$

图 6.3.6 表示：先把有序对按两个关系一起取商，与分别取商后组成有序对，得到同一个点，而且两种构造的拓扑也相同。

6.3.2 曲面的粘合

现在用商空间解释一些曲面。图中的箭头不是曲面上的向量场，而是指定边界点的对应规则：沿相同标号箭头行进到相同比例位置的两个点被认同。未指定的内部点不作额外

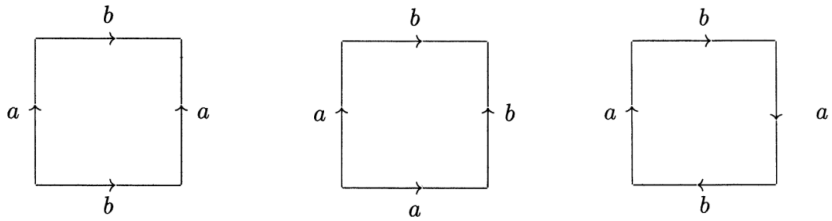


图 6.1: 多边形边界的粘合方式：同标号边上沿箭头处于相同位置的点相互认同。

粘合。因此读图时既要看哪些边同标号，也要看箭头方向；只看多边形轮廓无法决定商空间。对环面，具体映射为

$$[0,1]^2 \longrightarrow S^1 \times S^1, \qquad (s,t) \longmapsto (e^{2\pi i s}, e^{2\pi i t}).$$

它恰好认同两对相容方向的对边，并将四个角认作一点。由紧空间到 Hausdorff 空间的连续满射判定，这就是相应的商映射，商空间因而同胚于 $S^1 \times S^1$。

球面可以把两个圆盘沿边界一一粘合得到，两个圆盘分别对应上下半球。图 6.1 的中间图把相邻的两条 a 边认同，再把相邻的两条 b 边认同；沿左下角到右上角的对角线切开，得到的两个三角形就是这两个圆盘的多边形表示。

另一种表示是 $D^2/\partial D^2 \cong S^2$，即把圆盘的整个边界压成一点。可以直接构造映射验证这一点：在极坐标 $u = r(\cos\theta, \sin\theta)$ 下，令

$$u \longmapsto (\sin(\pi r)\cos\theta, \sin(\pi r)\sin\theta, \cos(\pi r)).$$

它在圆心取北极，整条边界取南极；除边界外，每个球面点都有唯一原像。这个映射连续，包括圆心处也连续，所以它从该商空间诱导到 S^2 的连续双射，再由紧性得同胚。

两对对边都按反向粘合，得到图中的实射影平面。它也可由球面上对径点认同得到，即 $S^2/(x \sim -x)$；每一对对径点对应 $\mathbb{R}^3$ 中的一条过原点直线。这里反向是指图中两条配对边的箭头方向相反，与沿整个多边形边界统一绕行的方向要区分开。

若先只把正方形的一对对边反向粘合，例如 $(0,t) \sim (1,1-t)$，得到 Möbius 带。它仍留有边界；再将图中的两条水平边按 $(s,0) \sim (s,1)$ 配对，就得到 Klein 瓶：一对对边同向，另一对反向。中间的路径示意帮助我们跟踪反向粘合：沿带绕行一次时，横向方

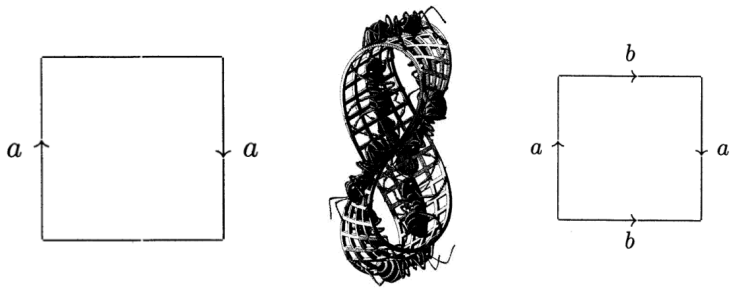


图 6.2: 从左至右为 Möbius 带的粘合、带上的路径示意，以及 Klein 瓶的粘合。

向翻转，不能把这幅图当作普通圆柱带来理解。左右的多边形图则精确规定哪些边界点相等，与前面表达映射复合相等的交换图各有不同用途。

虽然这些空间的整体形状不同，在没有边界的情形下，每个点附近仍像平面的一小块。这促使我们把“局部是欧氏空间”单独列为定义。

定义 6.3.6 (拓扑流形)**.** 本文所说的 N 维拓扑流形，是每一点都有一个开邻域与 $\mathbb{R}^N$ 同胚的 Hausdorff 空间。这里不将第二可数性包含在定义中。

也可以把定义中的 $\mathbb{R}^N$ 换成开球，因为例如 $u \mapsto u/(1-\|u\|)$ 将单位开球同胚到 $\mathbb{R}^N$，其逆为 $v \mapsto v/(1+\|v\|)$。

球面、环面、射影平面和 Klein 瓶都是 2 维流形。对这些粘合图，内部点的邻域直接是开圆盘；配对边上的点由两片半圆盘拼成圆盘；顶点处则把所有被认同的角扇形合在一起，也得到圆盘邻域。分离性可由闭等价关系的商判定保证。Möbius 带不同：它的边界点附近只能得到半圆盘，所以它属于带边界流形，而不满足这里的无边界定义。第二可数性将在定理 8.2.7 的可度量化判定中另行出现。

第七章

连通性与道路连通性

前面我们用开集讨论连续映射，也研究了怎样取子空间、乘积和商空间。现在想问的是：这些空间由多少个彼此分开的部分组成？在实直线上，介值定理使连续函数不能从一个值跳到另一个值而漏掉中间的值；我们先把这个现象抽象成连通性，再比较它与“能沿一条连续道路走过去”的区别。Cantor 集和正弦曲线会分别展示两种容易凭图形直觉误判的情况。

7.1 连通空间

介值定理说明，区间的连续像不能跳过两个已取到的值之间的某个值。先反过来想：若一个连续实函数 f 确实漏掉了中间值 c，则 $\{f<c\}$ 和 $\{f>c\}$ 就把定义域分成两个不交的非空开部分。因此，阻止这种跳跃的关键不是区间的长度，而是它不能被这样分开。这便引出连通性。

定义 7.1.1 (连通性与分离)**.** 本笔记约定，*连通空间*是不能写成两个不交非空开子集之并的非空空间。子集连通是指它作为子空间连通。上述两个开子集构成的分解称为一个*分离*。

若 $X=U\sqcup V$ 是分离，则 $U=X\setminus V$，所以 U,V 也都闭。于是，非空空间连通，当且仅当它仅有的开闭子集为 $\varnothing$ 与 X。还可以把这种划分写成函数：在 U 上赋值 0，在 V 上赋值 1，所得函数到离散空间 $\{0,1\}$ 连续。反过来，到这个离散空间的连续函数的两个纤维都开闭。因此，连通性也等价于这样的连续函数必为常值函数。

接下来需要一些构造连通集的方法。连续映射不会把原本连在一起的部分分开；给连通集添上某些极限点，也不应产生一块与原集完全隔离的新部分。至于取并，条件不能只是每一块各自连通，还要保证这些块有足够的重叠。

命题 7.1.2 (连通集的构造)**.** 连通空间的连续像连通。若 A 连通且 $A\subseteq B\subseteq\overline{A}$，则 B 连通。若非空的一族连通集有非空公共交，则其并连通。

证明. 若连续像有分离，将两侧沿映射取逆像，就得到定义域的两个不交非空开集，并且它们覆盖定义域，与连通性矛盾。

再设 $A\subseteq B\subseteq\overline{A}$。若 $B=U\sqcup V$ 是分离，A 的连通性迫使它完全位于一侧，不妨设 $A\subseteq U$。但 A 在 B 中稠密，故 B 的非空相对开集 V 必与 A 相交，矛盾。这里添入的点都来自 $\overline{A}$，正是为了保证这一稠密性。

最后，若所给连通集的并有分离，则每个成员都只能落在其中一侧。所有成员共有的点又迫使它们落在同一侧，另一侧便为空，仍是矛盾。 □

特别地，$\mathbb{R}$ 的非空子集连通，当且仅当它是区间。必要性很直观：若 $a<b$ 属于这个子集，却漏掉某个 $c\in(a,b)$，以 c 为端点的两个开半直线就在子集上给出分离。

反过来，设区间 J 有分离 $U\sqcup V$，交换两侧名称后可选 $u\in U, v\in V$ 使 $u<v$。我们沿 $[u,v]$ 从 U 一侧往 V 一侧走，考虑

$$c=\sup(U\cap[u,v]).$$

因为 $[u,v]\subseteq J$，点 c 必属于 U 或 V。若 $c\in U$，则 $c\neq v$，而 U 的相对开性又给出 c 右侧仍属于 $U\cap[u,v]$ 的点，与上确界矛盾。若 $c\in V$，则 $c\neq u$；V 在 c 左侧包含一小段区间，却按上确界定义又必须遇到 $U\cap[u,v]$，同样矛盾。这个证明也说明，实数的完备性怎样参与了区间的连通性。

现在将连续像的结论用于实值函数，其像就是一个区间。因此，连通空间上的连续实函数取得任意两个函数值之间的所有值；介值定理由此成为连通性的直接应用。

乘积的情形可以先从平面中的横线、竖线来想。任意两点未必能由一条已经给出的道路连接，但若每条横向、纵向的切片都连通，就可以先把相交的切片并起来，再逐步覆盖乘积。

定理 7.1.3 (连通空间的乘积)**.** 非空连通空间的任意乘积都连通。

证明. 先看 $X\times Y$，固定 (a,b)。对每个 $x\in X$，集合

$$(X\times\{b\})\cup(\{x\}\times Y)$$

是两个相交连通集的并，因而连通。这些集合又都有公共点 (a,b)，它们的并为整个 $X\times Y$。归纳即可得到有限积的结论。

对任意乘积 $\prod_i X_i$，固定一点 $a=(a_i)$。对每个有限指标集 F，令 X_F 为只允许 F 内的坐标与 a 不同的子空间。它同胚于有限积 $\prod_{i\in F}X_i$，所以连通；所有 X_F 都包含 a，因此 $D=\bigcup_F X_F$ 连通。

这里 D 一般不是整个乘积，但它稠密：任意非空基本开集只限制有限个坐标，在这些坐标内选取符合要求的值，其余坐标沿用 a_i，便得到 D 中的一点。由命题 7.1.2，$\overline{D}=\prod_i X_i$ 连通。空指标族的乘积为单点空间，也满足结论。 □

7.1.1 连通分支与局部连通性

一个空间可能整体不连通，但通过某一点仍有许多连通子集。我们想把所有能够和该点放在同一个连通子集中的点收在一起。它们都有这个公共点，所以上一命题保证取并以后仍连通；这使“极大的连通部分”成为一个确实存在的对象。

定义 7.1.4 (连通分支与局部连通性)**.** x 的*连通分支* $C(x)$ 是所有包含 x 的连通子集的并。若每一点的每个邻域都包含该点的一个连通邻域，则称空间*局部连通*。

集合 $C(x)$ 连通，并且是包含 x 的极大连通子集。其闭包仍连通，又包含 $C(x)$，故极大性迫使 $\overline{C(x)}=C(x)$，所以连通分支总是闭的。两个相交的连通分支之并也连通，故它们必须相同。这说明连通分支将 X 划分。

需要注意，分支未必开。例如 $\mathbb{Q}$ 中若有一个连通子集包含不同的两点，在两点之间取一个无理数，就能用左右半直线将它分离。因此 $\mathbb{Q}$ 的连通分支都是单点集，而这些

单点集并不开。局部连通性要排除的正是“一个小邻域仍散成许多无法在邻域内连到一起的部分”这种现象。

命题 7.1.5 (局部连通性的判定)**.** 下列条件等价：X 局部连通；每个开子空间的每个连通分支都在 X 中开；X 有由连通开集构成的基。局部连通空间的商像仍局部连通。

证明. 设 X 局部连通，C 是开集 U 的一个连通分支。对 $x \in C$，可取 x 的连通邻域 $V \subseteq U$。由于 V 与 C 相交，分支的极大性给出 $V \subseteq C$。V 是 x 的邻域，因此 x 是 C 的内点；遍历 $x \in C$，得 C 开。

现在每个开集都能写成它的连通分支之并，而这些分支是连通开集，故它们构成一组基。反过来，若有连通开集基，在给定邻域内部选一个包含指定点的基本开集，就得到所需的连通邻域。三个条件于是等价。

再设 $q : X \to Y$ 为商映射，$U \subseteq Y$ 开，C 是 U 的一个连通分支。考察开集 $q^{-1}(U)$ 的连通分支 D：若 D 与 $q^{-1}(C)$ 相交，则连通集 $q(D)$ 与 C 相交，且位于 U，所以 $q(D) \subseteq C$。因此 $q^{-1}(C)$ 是 $q^{-1}(U)$ 中若干连通分支的并。由 X 局部连通，这些分支都开，故 $q^{-1}(C)$ 开；商拓扑再给出 C 开。应用刚证的判定，Y 局部连通。 □

这个判定仍是逐点、逐邻域的。在紧度量空间中，我们可以把它变成一个每次只涉及有限多个集合的条件：给定大小上限后，是否能用有限块小的连通闭集覆盖整个空间？

定理 7.1.6 (Sierpiński 局部连通判定)**.** 紧度量空间局部连通，当且仅当对每个 $\varepsilon > 0$，它都有一个由直径不超过 ε 的连通闭集构成的有限覆盖。

证明. 若空间局部连通，则由命题 7.1.5，可用直径小于 ε 的连通开集覆盖空间。紧性给出有限子覆盖；再取各成员闭包。闭包仍连通，而度量的连续性保证取闭包不会增大直径，故得到所需覆盖。

反过来，给定 x 的邻域 U，先取 $B(x, r) \subseteq U$，再取由直径不超过 $r/2$ 的连通闭集组成的有限覆盖。将其中所有包含 x 的成员取并，记为 K。这些成员有公共点 x，故 K 连通，并且每个成员都包含于 $B(x, r)$。

还需确认 K 是一个邻域，而不只是包含 x 的连通集。其余覆盖成员均避开 x，它们的有限并为闭集；其补集便是 x 的开邻域。由于原族覆盖全空间，这个补集包含于 K。于是 $K \subseteq U$ 确实是 x 的连通邻域。 □

7.1.2 另一种极端：零维空间

连通性使开闭集不能把空间分成两块。我们也可以考虑相反的情形：在每个点的任意小邻域里，都能找到一个开闭邻域。这样的集合既是邻域，又能和自己的补集完全分开；所以它们适合用来逐步切分空间。

定义 7.1.7 (零维、全不连通与无孤立点)**.** 有开闭集基的非空空间称为*零维空间*。若所有连通子集都是单点集，则称空间*全不连通*。我们还会考察没有孤立点的空间，这一性质在英文中称为 perfect。

零维空间正则，因为可在每个开邻域内选取开闭基本邻域，而这个基本邻域等于自身闭包。若空间还满足 T_0，不同点可以先由一个开集区分，再由其中的基本开闭集 G

区分；G 与 $X \setminus G$ 就是它们的不交开邻域。因此空间为 Hausdorff，且任何包含这两点的子空间都被这两个开集分离，故它全不连通。

逆向并不能仅凭“没有非平凡连通子集”直接造出开闭邻域。紧性在这里帮助我们把许多逐点分离压缩成有限次分离。

命题 7.1.8 (紧空间中的零维性)**.** 对非空紧空间 X，下列条件等价：X 为 Hausdorff 且全不连通；开闭集可分离不同点；X 零维且满足 T_0。

证明. 先设 X 紧且 Hausdorff。固定 x，把所有包含 x 的开闭集取交，记为

$$Q(x) = \bigcap \{G : x \in G,\ G \text{ 开闭}\}.$$

这是无法用开闭集与 x 分开的点所组成的集合。我们证明它连通。

若不然，可把 $Q(x)$ 分成不交的非空相对闭集 A, B，不妨设 $x \in A$。由于 $Q(x)$ 在 X 中闭，A, B 也在 X 中闭。紧 Hausdorff 空间正规，故有不交开集 U, V 分别包含 A, B。每个 $y \in X \setminus (U \cup V)$ 都不属于 $Q(x)$，所以存在 x 的开闭邻域 G_y 不含 y。各 $X \setminus G_y$ 覆盖紧集 $X \setminus (U \cup V)$，从中选有限子覆盖，就得到一个开闭邻域 G，满足

$$Q(x) \subseteq G \subseteq U \cup V.$$

此时 $G \cap U$ 开；它的补集为 $(X \setminus G) \cup (G \cap V)$，也开。因此 $G \cap U$ 是包含 x 却避开 B 的开闭集，与 $B \subseteq Q(x)$ 矛盾。

若 X 还全不连通，连通集 $Q(x)$ 只能是 $\{x\}$。于是对每个 $y \neq x$，存在包含 x 而不含 y 的开闭集，这证明第一条件推出第二条件。

再设开闭集可以分离点。给定开集 U 与 $x \in U$，为每个 $y \notin U$ 选取包含 x、不含 y 的开闭集 G_y。用紧性从覆盖 $X \setminus U$ 的各补集中选有限个，则对应 G_y 的交是包含 x 且包含于 U 的开闭邻域。因此 X 零维；分离点的条件也直接给出 T_0。本命题前的论证说明第三条件推出第一条件。 □

Cantor 集既紧、可度量化，又有开闭集基，而且没有孤立点。现在我们想知道，这些条件是否已经足以确定它，而不必依赖它在实直线上的三进制位置。开闭划分提供了办法：不断把空间分成更小的有限块，用嵌套的块来指定一个点；只要每一块还可以继续分，就能与 Cantor 集同步地进行这一过程。

定理 7.1.9 (Brouwer 的 Cantor 集刻画)**.** 每个非空、没有孤立点的零维紧度量空间都与 Cantor 集 C 同胚。

证明. 我们分别构造 X 与 C 的有限开闭划分，并给同一层两边的各块建立双射。下一层必须加细上一层，而且对应关系也要相容；第 n 层的每块直径都要求小于 2^{-n}。

先说明如何推进一步。对已经对应的两块 $P \subseteq X$、$Q \subseteq C$，分别用足够小的开闭邻域作有限覆盖，再按顺序从每个覆盖成员中减去先前成员，去掉空集。这就得到各自由有限个小直径非空开闭集组成的划分。不过，两边块数可能不同。此时用到没有孤立点的条件：每个非空开闭部分仍没有孤立点，至少含有两个点；用一个开闭集将这两点分开，就可以把该部分再分成两个非空开闭部分。在块数较少的一侧重复这一步，直到两侧块数相同，然后任意配对。继续细分不会增大直径，所以所有要求都保留下来。

从对应的整块 X, C 开始归纳，就得到所需划分。给定 $x \in X$，每一层都有唯一一块包含 x；这些块在 C 中的对应块非空、闭且嵌套。紧性保证交非空，直径趋于零保证交只有一点，将其记为 $h(x)$。交换两侧作同样构造，所得映射是 h 的逆，故 h 为双射。

最后检查连续性。给定 $\varepsilon > 0$，取 n 使 $2^{-n} < \varepsilon$。包含 x 的第 n 层开闭块是 x 的开邻域，该块上所有点的像都位于同一个直径小于 ε 的对应块内。因此 h 在 x 连续。交换两侧得到逆映射连续，故 h 是同胚。 □

如果非空零维紧度量空间 X 有孤立点，就不能直接应用上述刻画。不过，我们可以取 $X \times C$：乘积的开闭矩形构成基，紧性与可度量化性保留；任一基本邻域在 C 坐标上都不只含一点，所以乘积没有孤立点。因此 $X \times C \cong C$。

选 $c_0 \in C$，令 $i(x) = (x, c_0)$，并令 $p : X \times C \to X$ 为投影。二者满足 $pi = \mathrm{id}_X$，如下图所示：

$$\begin{array}{ccccc} X & \xhookrightarrow{\ i\ } & X \times C & \xrightarrow{\ \cong\ } & C \\ & \searrow^{\mathrm{id}_X} & \downarrow{\scriptstyle p} & & \\ & & X & & \end{array} \tag{7.1.1}$$

若将右侧同胚记为 $h : X \times C \to C$，则 $j = hi$ 把 X 嵌入 C，而 $r = ph^{-1}$ 满足 $rj = \mathrm{id}_X$。换言之，X 同胚于 C 的一个收缩核：映射 $jr : C \to j(X)$ 在 $j(X)$ 上为恒等映射。特别地，r 是从 C 到 X 的连续满射，后面会用到这一点。这里非空条件必要，因为不存在从 C 到空空间的映射。

7.2 道路连通空间

连通性排除了把空间分开的可能，却没有直接告诉我们怎样从一点到达另一点。在区间、圆和欧氏空间中，我们习惯用一条连续参数曲线完成这种移动。于是可以提出更具体的要求：给定起点和终点，能否用 $[0,1]$ 上的连续映射把它们连接起来？

定义 7.2.1 (道路与道路连通性)**.** X 中从 x 到 y 的一条道路是满足 $a(0) = x$ 和 $a(1) = y$ 的连续映射 $a : [0,1] \to X$。若非空空间中任意两点都可由道路连接，则称空间道路连通。若每一点的每个邻域都包含该点的一个道路连通邻域，则称空间局部道路连通。

每个道路连通空间都连通。事实上，固定一点 x，所有从 x 出发的道路的像都是连通集，并且有公共点 x；道路连通性又保证这些像覆盖全空间，故可应用命题 7.1.2。这个证明只使用了道路的像是连通的，并没有提供从连通性反过来构造道路的办法。

道路连通性在连续映射下也保留：把一条道路 a 与连续映射 f 复合，$f \circ a$ 就连接它的两个端点的像。非空道路连通空间的任意乘积仍道路连通，因为对乘积中的两点，可以逐坐标选择道路 a_i，再令 $a(t) = (a_i(t))_i$。乘积拓扑的映射判定，即图 6.2.1，保证 a 连续。

若想经过一个公共点把两条道路接起来，需要把各自的参数区间压到半段。具体地，a 的逆道路为 $a^-(t) = a(1-t)$；若 $a(1) = b(0)$，定义

$$(a * b)(t) = \begin{cases} a(2t), & 0 \le t \le 1/2, \\ b(2t-1), & 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

两段分别连续，并在 $t = 1/2$ 处取同一值，所以由有限闭覆盖的粘贴引理，$a * b$ 连续。这证明了有公共点的道路连通集之并仍道路连通：从第一点走到公共点，再从公共点走到第二点即可。

常值道路给出自反性，逆道路给出对称性，拼接给出传递性，因此“可以用道路连接”是一个等价关系。其等价类称为**道路连通分支**，也就是极大的道路连通子集。每个道路连通分支包含在某个连通分支中，但二者未必相等；道路连通分支也未必闭，后面的正弦曲线将同时说明这两点。

局部道路连通性也有和命题 7.1.5 平行的判定：它等价于每个开子空间的道路连通分支都开，也等价于存在道路连通开集基。证明可以直接沿用分支论证：若 C 是开集 U 的道路连通分支，对 $x \in C$ 取包含于 U 的道路连通邻域 V，拼接道路说明 $V \subseteq C$，故 C 开。这些分支随即构成所需的基；反向则在给定邻域内选一个基本开集。

因此，连通且局部道路连通的空间一定道路连通。因为道路连通分支此时都是开集，若有不止一个分支，一个分支与其余分支的并就构成分离。又因道路连通集总连通，局部道路连通空间也一定局部连通。需要这些局部条件的原因，在下面的例子中会变得具体。

例 7.2.2 (拓扑学家的正弦曲线)**.** 令 $G = \{(x, \sin(1/x)) : 0 < x \le 1\}$, $S = G \cup \{(0,0)\}$。图像 G 是 $(0,1]$ 的连续像，因而连通；又因 $G \subseteq S \subseteq \overline{G}$，$S$ 也连通。但它不道路连通。更一般地，$\overline{G} = G \cup (\{0\} \times [-1,1])$ 中没有道路能把竖直线段与 G 连接起来。

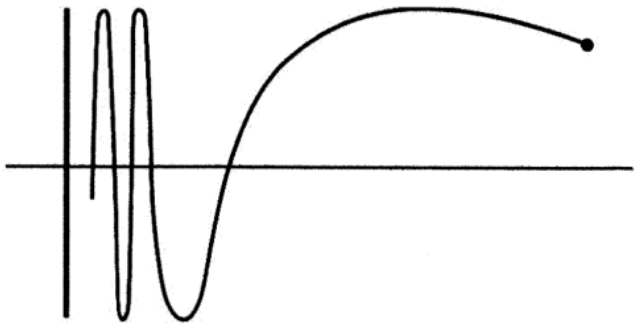


图 7.1: 趋近纵轴时不断振荡的正弦图像。

证明. 图 7.1 的困难不在于曲线没有趋近纵轴，而在于趋近时纵坐标始终不停振荡。假设有道路 $a : [0,1] \to \overline{G}$，其起点在竖直线段上，终点在 G 中。写作 $a(t) = (u(t), v(t))$，则 $u(0) = 0$、$u(1) > 0$，并且当 $u(t) > 0$ 时

$$v(t) = \sin\big(1/u(t)\big).$$

令 t_0 为闭集 $u^{-1}(\{0\})$ 的最大元素。这个最大值存在，且 $t_0 < 1$；于是 $u(t_0) = 0$，而 $t_0 < t \le 1$ 时 $u(t) > 0$。

对任意充分小的 $\delta > 0$，连续函数 u 在 $[t_0, t_0 + \delta]$ 上取到 0 和某个正值，所以它取遍二者之间的值。特别地，只要 n 足够大，它会分别取到

$$(\pi/2 + 2\pi n)^{-1}, \qquad (3\pi/2 + 2\pi n)^{-1}.$$

相应的 v 值分别为 1 和 -1。由于 δ 可以任意小，v 在 t_0 的任意右邻域中都同时取到这两个值，这与 v 在 t_0 处连续矛盾。 $\square$

图像 G 自身道路连通，因为它同胚于区间 $(0,1]$；竖直线段也道路连通。因此它们恰是 $\overline{G}$ 的两个道路连通分支，而 G 在 $\overline{G}$ 中不闭。对于 S，相应的两个道路连通分支为 G 与单点集 $\{(0,0)\}$，尽管 S 整体连通。

还可以直接看到 S 在原点处不局部连通。考虑原点的开邻域 $U = S \cap \{|y| < 1/2\}$。假设有连通邻域 N 满足 $(0,0) \in N \subseteq U$。因为 N 是邻域且原点是 G 的聚点，N 必包含某个第一坐标为正数 a 的图像点。投影到第一坐标后，N 的像是包含 $0, a$ 的连通实数集，故包含整个 $[0,a]$。

但在 $(0,a)$ 内可取 x 使 $\sin(1/x) = 1$。S 中第一坐标为这个 x 的点只有 $(x,1)$，它不属于 U，更不可能属于 N，与投影像包含 $[0,a]$ 矛盾。这说明原点附近的振荡不仅妨碍道路接入，也使任意足够薄的邻域无法再缩成连通邻域。

第八章

Urysohn 引理与可度量化

我们已经知道怎样用开邻域分离点或闭集。不过，分离公理只告诉我们哪些集合能够避开，还没有给出可以计算的函数。本章从两个不交闭集出发，构造分别在其上取 0 和 1 的连续函数。随后一方面用这些函数延拓闭子集上的函数，另一方面把许多个这样的函数合成距离，从而回答：一个只给定了开集的空间，何时能够由某个度量产生？

8.1 Urysohn 引理

正规性允许我们用不交开集分离两个闭集 A, B。现在希望把这种分离变成一个连续函数，使它在 A 上取 0，在 B 上取 1。若只把两侧分别赋值 $0, 1$，通常无法处理两侧之间的点，也无法保证边界处连续。因此需要在 0 与 1 之间逐步插入更多取值层次。

先从已有连续函数来观察。若把 U_r 想成函数值高于 r 的区域，则 r 越大，U_r 越小；而为了控制边界，我们希望更高区域的闭包仍留在较低区域内部，即 $r < s$ 时有 $\overline{U_s} \subseteq U_r$。这样，某一点能达到的最高层次就有希望给出它的函数值。图 8.1 的梯田可以帮助理解这个方向：我们先规定嵌套的水平区域，再由点所处的层次恢复高度。



图 8.1: 从嵌套的水平区域恢复函数，可以类比于梯田的高度。

引理 8.1.1 (由嵌套水平集构造函数)**.** 设由 $r \in \mathbb{Q}$ 编号的开集 U_r 满足：当 $r < s$ 时，$\overline{U_s} \subseteq U_r$，且 $\bigcup_r U_r = X$、$\bigcap_r U_r = \varnothing$。则 $f(x) = \sup\{r \in \mathbb{Q} : x \in U_r\}$ 是取有限值的连续实函数。

证明. 对每个 x，并集条件保证它至少属于某个 U_r，所以取上确界的集合非空。交集条件保证存在 s 使 $x \notin U_s$；由嵌套性，所有高于 s 的层次也都不含 x，故这个集合有上界。于是 $f(x)$ 确实是一个实数。

检查连续性时，不必直接估计 $f(x) - f(y)$，只需把上下半直线的逆像写成开集。对每个 $a \in \mathbb{R}$，我们有

$$\{f > a\} = \bigcup_{r > a} U_r, \qquad \{f < a\} = \bigcup_{r < a} (X \setminus \overline{U_r}),$$

这里并集中的指标均为有理数。第一个等式来自上确界定义：上确界大于 a，恰好意味着某个高于 a 的层次仍包含该点。

第二个等式要用闭包嵌套条件。若 $f(x) < a$，取有理数 $f(x) < s < r < a$，则 $x \notin U_s$，由 $\overline{U_r} \subseteq U_s$ 得 $x \notin \overline{U_r}$。反过来，若 $x \notin \overline{U_r}$ 且 $r < a$，则 x 不属于任何指标大于或等于 r 的层次，所以 $f(x) \le r < a$。等式两侧于是确实相等，且右侧均开，故 f 连续。 □

这个引理把构造函数的问题归结为构造开集。正规空间的收缩性质正好适合逐层插入：若某个闭集已在开集内部，就能在二者之间放入一个开集，并让它的闭包仍留在外侧开集里。

定理 8.1.2 (Urysohn 引理)**.** 若 A, B 为正规空间 X 的两个不交闭子集，则存在连续映射 $f : X \to [0,1]$，满足 $f|_A = 0$ 与 $f|_B = 1$。

证明. 令 $U_0 = X \setminus A$。因为闭集 B 包含于 U_0，正规性给出开集 U_1，使

$$B \subseteq U_1 \subseteq \overline{U_1} \subseteq U_0.$$

接下来将 $(0,1) \cap \mathbb{Q}$ 列成序列，按这个顺序逐个插入层次。每一步只已定义有限多个层次，所以新指标 r 在这些指标中有左右相邻的两项 $a < r < b$。已构造的包含关系给出 $\overline{U_b} \subseteq U_a$，再用一次正规性，便可选开集 U_r 满足

$$\overline{U_b} \subseteq U_r \subseteq \overline{U_r} \subseteq U_a.$$

新的集合放在相邻两层之间，因而也和其余已定义层次保持所需的闭包包含关系。归纳便得到 $[0,1]$ 内所有有理数层次。

对 $r < 0$ 令 $U_r = X$，对 $r > 1$ 令 $U_r = \varnothing$。这些补充既保证引理 8.1.1 的并、交条件，也使所得函数的值落在 $[0,1]$。对于 $x \in A$，恰有所有负层次包含它，而非负层次不包含它，故上确界为 0。对于 $x \in B$，所有不高于 1 的层次均包含它，而高于 1 的层次为空，故上确界为 1。引理保证所得函数连续。 □

反过来，若任意两个不交闭集都能由这样的连续函数分开，则 $f^{-1}([0,1/3))$ 与 $f^{-1}((2/3,1])$ 就是分别包含 A, B 的不交开集。因此，这种连续函数的存在性恰好刻画正规性，而不仅是它的一个额外推论。

8.1.1 连续函数的插入与延拓

Urysohn 引理规定了两个闭集上的函数值。我们现在允许在每一点给出一个取值区间 $[g(x), h(x)]$，想在这些区间里连续地选择一个值。若某点附近的下边界不断逼近一个高于该点上边界的数，连续选择就必定失败。因此我们需要这样的局部控制：在一点严格高于下边界或严格低于上边界的数，在附近仍满足相同的严格不等式。

具体地，若对每个实数 a，$\{g < a\}$ 都开，则称 g *上半连续*；等价地，$\{g \ge a\}$ 都闭。若 $\{h > a\}$ 都开，则称 h *下半连续*；等价地，$\{h \le a\}$ 都闭。一个函数同时上、下半连续，当且仅当它连续。对即将充当下边界的 g，上半连续意味着 $g(x) < a$ 时，这个严格上界在 x 附近仍成立；上边界的下半连续性则给出对应的严格下界。

定理 8.1.3 (Katětov–Tong 插入定理)**.** 在正规空间上，若 $g, h : X \to \mathbb{R}$ 分别上半连续和下半连续，且 $g \le h$，则存在连续映射 $f : X \to \mathbb{R}$，满足 $g \le f \le h$。

证明. 先设 $0 \le g \le h \le 1$。我们暂时不要求精确落在区间里，而是先构造误差至多 $1/n$ 的连续近似。对 $1 \le k \le n$，闭集

$$A_k = \{g \ge k/n\}, \qquad B_k = \{h \le (k-1)/n\}$$

不交，否则同一点会满足 $g > h$。由 Urysohn 引理，可取 $u_k : X \to [0,1]$ 连续，在 A_k 上为 1，在 B_k 上为 0。函数 u_k 的作用是：下边界已达到 k/n 时，打开这一层；上边界尚未达到 $(k-1)/n$ 时，关掉这一层。于是令

$$\gamma = \max_{1 \le k \le n} (k/n) u_k.$$

有限最大值保证 γ 连续，且 $0 \le \gamma \le 1$。对下界，取 $k = \lfloor ng(x) \rfloor$；若 $k \ge 1$，则 $u_k(x) = 1$，故 $\gamma(x) \ge k/n \ge g(x) - 1/n$；若 $k = 0$，直接由 $\gamma(x) \ge 0$ 得到同一估计。对上界，第 k 项若非零，则 $x \notin B_k$，故 $h(x) > (k-1)/n$，从而 $(k/n)u_k(x) \le k/n < h(x) + 1/n$。所以

$$g - 1/n \le \gamma \le h + 1/n.$$

仅有越来越精确的近似还不够，因为不同的 γ 可能在宽阔的区间内来回移动，并不收敛。我们让下一步只能在上一步已经选定的窄区间里进行。由 $g_0 = g, h_0 = h$ 出发，第 j 步对 g_{j-1}, h_{j-1} 取上面误差为 $\delta_j = 2^{-j}$ 的近似 γ_j，再令

$$g_j = \max\{g_{j-1}, \gamma_j - \delta_j\}, \qquad h_j = \min\{h_{j-1}, \gamma_j + \delta_j\}.$$

近似估计给出 $g_{j-1} \le \gamma_j + \delta_j$ 与 $\gamma_j - \delta_j \le h_{j-1}$，故新旧两个闭区间相交，新的区间 $[g_j(x), h_j(x)]$ 非空。它们逐次嵌套，仍在 $[0,1]$ 中，长度不超过 $2\delta_j$。同时，有限最大值保持上半连续性，有限最小值保持下半连续性，所以归纳可以继续。

对每个 x，这些嵌套区间的交只有一点，记为 $f(x)$。长度的一致估计说明 g_j, h_j 都一致收敛到 f。为确认连续性，先看上半连续：若 $f(x) < a$，取 $\eta > 0$ 使 $f(x) + 3\eta < a$，再取 j 使 $|g_j - f| < \eta$ 处处成立。由 g_j 上半连续，在 x 的某个邻域内有 $g_j(y) < g_j(x) + \eta$，于是 $f(y) < f(x) + 3\eta < a$。所以 $\{f < a\}$ 开。对 h_j 作相反的不等式，得 $\{f > a\}$ 也开。因此 f 连续，且始终满足 $g \le f \le h$。

对一般实值上下界，取递增同胚 $\theta : \mathbb{R} \to (0,1)$。递增连续复合保持相应的半连续性，所以可在 θg 与 θh 之间插入连续函数 v。由于这两个边界逐点都严格位于 $(0,1)$，v 也不取端点值，故 $f = \theta^{-1} \circ v$ 有定义并满足要求。 □

这个定理可以直接处理闭集上的延拓问题。在已经规定函数值的地方，把上下边界都设成这个值；在其余位置放宽区间。这样，一旦得到连续选择，它就自动与原函数一致。

定理 8.1.4 (Tietze 扩张定理)**.** 若 M 是正规空间 X 的闭子集，则每个连续映射 $f : M \to \mathbb{R}$ 都能连续延拓到 X。若 f 取值于 $[-1,1]$，则延拓也可取值于 $[-1,1]$。

证明. 先设 $f : M \to [-1,1]$。在 M 上令 $g = h = f$，在 $X \setminus M$ 上令 $g = -1, h = 1$。需要核对它们的半连续性。例如，当 $-1 < a \le 1$ 时，

$$\{g \ge a\} = \{x \in M : f(x) \ge a\}.$$

右侧在 M 中闭，而 M 在 X 中闭，所以它在 X 中闭；其余 a 给出的集合为 X 或空集。因此 g 上半连续。同样地，用 $\{h \le a\}$ 可得 h 下半连续。定理 8.1.3 插入的连续函数 $\widetilde{f}$ 满足 $g \le \widetilde{f} \le h$，所以在 M 上只能等于 f，在其余点也仍取值于 $[-1,1]$。

对可能无界的 f，先取同胚 $\theta : \mathbb{R} \to (-1,1)$，并将 $\theta \circ f$ 延拓为 $u : X \to [-1,1]$。现在不能立即复合 θ^{-1}，因为延拓后 u 可能在 M 外取到端点 ± 1。我们需要把这些端点值压回开区间，同时不改变 M 上的值。

令 $E = u^{-1}(\{-1,1\})$，则 E 是与 M 不交的闭集。由 Urysohn 引理取连续函数 $\rho : X \to [0,1]$，在 M 上为 1，在 E 上为 0。若 $x \notin E$，则 $|\rho(x)u(x)| \le |u(x)| < 1$；若 $x \in E$，则乘积为 0。因此 ρu 处处取值于 $(-1,1)$，而在 M 上仍等于 $\theta \circ f$。所求延拓就是 $\theta^{-1} \circ (\rho u)$。 □

令 $i : M \hookrightarrow X$ 为包含映射，延拓所满足的等式是 $\widetilde{f} \circ i = f$。下图中的虚线表示我们构造出的映射；从 M 直接到 $\mathbb{R}$，与先包含到 X 再用 $\widetilde{f}$，所得值完全相同：

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\ f\ } & \mathbb{R} \\ {\scriptstyle i}\big\downarrow & \nearrow_{\widetilde{f}} & \\ X & & \end{array} \tag{8.1.1}$$

这里要求的是延拓存在，并没有唯一性要求；闭集外的函数值通常仍有许多选择。

8.2 可度量化定理

现在我们已经能够构造连续实函数，接下来想用它们定义距离。单个函数 f 给出 $|f(x)-f(y)|$，它满足对称性和三角不等式，却可能把不同点的距离算成 0。因此需要许多个函数共同分离点。仅仅分离点还不够：为了让新度量产生原拓扑，还要使原来每个开邻域都能用这些函数识别。

一个合适的函数应当在点 x 附近等于 1，在给定邻域 U 外等于 0。这样，只要函数值与 1 足够接近，就不可能走出 U。Urysohn 引理能够提供这种函数，但它需要正规性；我们先说明怎样由正则性和可数性得到正规性。

引理 8.2.1 (可数收缩判定)**.** 空间正规，当且仅当对满足 $F \subseteq U$ 的闭集 F 与开集 U，存在一列开集 V_n 覆盖 F，并满足 $\overline{V_n} \subseteq U$。特别地，每个第二可数的正则空间都正规。

证明. 正规性给出一个开集 V，满足 $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$；令所有 $V_n = V$，即得必要性。

反过来，给定不交闭集 F, G。按假设取开集列 H_n 覆盖 F，且每个 $\overline{H_n}$ 都避开 G；再取开集列 K_n 覆盖 G，且每个 $\overline{K_n}$ 都避开 F。两列开集的并未必彼此不交，所以不能直接完成分离。我们按指标顺序逐步删去已经出现的另一侧闭包，令

$$H = \bigcup_n \left(H_n \setminus \bigcup_{j \le n} \overline{K_j} \right), \qquad K = \bigcup_n \left(K_n \setminus \bigcup_{j \le n} \overline{H_j} \right).$$

每一项只删去有限个闭集，故 H, K 都开；被删去的闭包分别避开 F, G，所以 $F \subseteq H$、$G \subseteq K$。若一点同时落在来自 H_n 与 K_m 的两项中，则 $m \le n$ 时第一项已经删去 $\overline{K_m}$，而 $n \le m$ 时第二项已经删去 $\overline{H_n}$，两种情况都矛盾。因此 H, K 不交，空间正规。

若 X 第二可数且正则，给定 $F \subseteq U$，对每个 $x \in F$ 先用正则性取 $x \in W_x \subseteq \overline{W_x} \subseteq U$，再在 W_x 内选包含 x 的基本开集。所有闭包包含于 U 的基本开集于是覆盖 F，而可数基保证它们至多可数，故上述判定适用。 □

有了正规性，我们只需为可数基中的一对嵌套邻域构造一个函数。两重指标仍是可数的，这便能把所有函数值放进一个可数乘积，也能让所有坐标差按可求和的权重合成距离。

定理 8.2.2 (Urysohn 可度量化定理)**.** 每个第二可数的正则 T_0 空间都可度量化，且可嵌入 Hilbert 立方体 $[0,1]^{\mathbb{N}}$。特别地，每个第二可数紧 Hausdorff 空间都可度量化。

证明. 设 $(U_n)_{n\geq 1}$ 为可数基。对每个满足 $\overline{U_m} \subseteq U_n$ 的指标对 (m,n)，由引理 8.2.1 及 Urysohn 引理，选取连续函数 $f_{mn} : X \to [0,1]$，使它在 $\overline{U_m}$ 上为 1，在 $X \setminus U_n$ 上为 0。

先确认这些函数够用。给定开集中的点 $x \in U$，先选 $x \in U_n \subseteq U$，再用正则性收缩邻域，并从基中选取 U_m，得到

$$x \in U_m \subseteq \overline{U_m} \subseteq U_n \subseteq U.$$

对应的函数满足 $f_{mn}(x) = 1$，而 $\{f_{mn} > 1/2\} \subseteq U$。因此，原来的每个邻域都包含由这些函数值确定的邻域。又因正则 T_0 空间为 Hausdorff 空间，对不同点 x, y 可选不含 y 的 U；上述函数便在 x, y 上分别取 $1, 0$，所以它们还分离点。

于是对角映射

$$\Phi : X \longrightarrow [0,1]^{\{(m,n):\overline{U_m}\subseteq U_n\}}, \qquad x \longmapsto (f_{mn}(x))_{m,n}$$

连续且单射；上一段的邻域判定又说明从像空间回到 X 的逆映射连续，所以它是嵌入。指标集至多可数，将这些坐标排列并在需要时补零，就得到到 $[0,1]^{\mathbb{N}}$ 的嵌入。

还可以直接写出相容度量：

$$d(x,y) = \sum_{\overline{U_m}\subseteq U_n} 2^{-(m+n)} |f_{mn}(x) - f_{mn}(y)|.$$

所有指标均从 1 开始。各项由 $2^{-(m+n)}$ 控制，故级数一致收敛；分离点性质给出正定性，对称性和三角不等式则逐项成立。对固定 x，$d(x,-)$ 是连续函数的一致极限，因此每个 d-开球在原拓扑中开。

反过来，给定 $x \in U$，取上面得到的指标对 (m,n)。若 $y \notin U_n$，则 $f_{mn}(x) = 1, f_{mn}(y) = 0$，所以仅这一项就给出 $d(x,y) \geq 2^{-(m+n)}$。因此

$$B_d(x, 2^{-(m+n)}) \subseteq U_n \subseteq U.$$

每个原邻域都包含一个 d-开球，两个拓扑恰好相同。最后，紧 Hausdorff 空间正则，因此第二可数紧 Hausdorff 空间满足定理的假设。 □

可数立方体不仅帮助构造度量，还能把不同紧度量空间放进一个共同的空间。结合上一章对 Cantor 集的刻画，我们甚至能从同一个 Cantor 集连续地映满任意非空紧度量空间。这里的“映满”允许把许多点粘合，因而不会与 Cantor 集全不连通这一性质矛盾。

定理 8.2.3 (Cantor 集的 Hausdorff 连续像)**.** Hausdorff 空间是 C 的连续像，当且仅当它是非空紧可度量化空间。

证明. 先说明一个更一般的事实：紧度量空间 K 的 Hausdorff 连续像 Y 仍可度量化。设 $q : K \to Y$ 为连续满射。Y 紧；同时 q 是闭映射，因为闭子集的像紧，而紧子集在 Hausdorff 空间中闭。

取 K 的可数基，并记 $\mathcal{V}$ 为这组基的全部有限并组成的可数族。我们希望把其中的集合传到 Y，但 $q(V)$ 未必开，因此改用

$$W_V = Y \setminus q(K \setminus V), \qquad V \in \mathcal{V}.$$

由于 q 闭，W_V 开。它包含的正是那些整个纤维都落在 V 内的点。给定 $y \in W$ 且 $W \subseteq Y$ 开，紧纤维 $q^{-1}(y)$ 可用有限个基本开集覆盖，并使其并 V 满足

$$q^{-1}(y) \subseteq V \subseteq q^{-1}(W).$$

于是 $y \in W_V \subseteq W$。故各 W_V 构成 Y 的可数基，由定理 8.2.2 得 Y 可度量化。将 $K = C$ 代入，即得所需的正向结论；非空性与紧性直接由连续满射保留。

反过来，设 X 为非空紧度量空间。它第二可数，由前一定理可嵌入 $[0,1]^{\mathbb{N}}$；其像紧，因而在这个 Hausdorff 空间中闭。已有的 Cantor 满射 $C \to [0,1]$ 逐坐标给出连续满射 $C^{\mathbb{N}} \to [0,1]^{\mathbb{N}}$。又因 $C \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 且 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 可数，将双重坐标重新排列便得 $C^{\mathbb{N}} \cong C$。

在上述满射下，X 的逆像 K 是 $C^{\mathbb{N}}$ 的非空闭子集，故是非空零维紧度量空间。图 7.1.1 所给结论说明存在连续满射 $C \to K$。将它与限制映射 $K \to X$ 复合，就得到从 C 到 X 的连续满射。 □

连通紧度量空间称为*连续统*。若其中至少有两点 a, b，则由 Urysohn 引理存在连续实函数在这两点分别取 $0, 1$；连通性保证它的像包含整个 $[0,1]$。因此空间的基数至少为 $|\mathbb{R}|$。另一方面，它嵌入 $[0,1]^{\mathbb{N}}$，而可数个实数坐标组成的集合仍有基数 $|\mathbb{R}|$，故非退化连续统的基数恰好为 $|\mathbb{R}|$。

8.2.1 局部有限族

第二可数性是很方便的充分条件，但并非可度量化的必要条件。例如，一个不可数离散空间可由离散度量产生，却不可能有可数基。问题在于上一种构造把全部函数都排成了一列；若函数有不可数多个，我们不能直接沿用同样的级数。

我们改为按尺度分层，每层允许任意多个集合，但要求在每一点附近只会遇到有限个。这样，虽然这一层整体很大，在检查连续性或计算函数值时，局部仍只有有限项需要处理。

定义 8.2.4 (局部有限、加细与仿紧性)**.** 若每一点都有一个邻域只与集族中有限个成员相交，则称该集族*局部有限*。可数个局部有限族的并称为 σ-局部有限族。若覆盖 $\mathcal{V}$ 的每个成员都包含于覆盖 $\mathcal{U}$ 的某个成员，则称 $\mathcal{V}$ 是 $\mathcal{U}$ 的一个*加细*。若每个开覆盖都有局部有限的开加细，则称空间*仿紧*。

局部有限性有一个后面反复要用的好处：它让无限并在局部表现得像有限并。若 (A_i) 局部有限，则 $(\overline{A_i})$ 也局部有限，因为一个开集与 A_i 相交，当且仅当它与 $\overline{A_i}$ 相交。并且

$$\overline{\bigcup_i A_i} = \bigcup_i \overline{A_i}.$$

右侧总包含于左侧；为证相反包含，只需说明右侧闭。若 x 不在右侧中，先取一个只遇到有限个 $\overline{A_i}$ 的开邻域，再从中删去这有限个闭集，就得到避开所有 $\overline{A_i}$ 的 x 的开邻域。因此右侧确实闭。

接下来要说明，度量能够把任意开覆盖整理成局部有限的开覆盖。单纯取越来越小的球还不够，因为它们可能在同一点附近重叠无穷多次。下面的构造分两步控制重叠：先在同一尺度按良序分配球心，再让更小尺度避开已经覆盖的区域。

定理 8.2.5 (度量空间的仿紧性)**.** 每个度量空间都仿紧。

证明. 将给定开覆盖 $(U_s)_{s\in T}$ 良序化，取 $r_n = 2^{-n}$，$n \geq 1$。先令

$$G_{s,n} = \{x : B(x, 3r_n) \subseteq U_s\}, \qquad H_{s,n} = G_{s,n} \setminus \bigcup_{t<s} U_t.$$

$G_{s,n}$ 选出在 U_s 内有足够余量的球心；再删去先前的 U_t，使同一尺度中归到不同覆盖成员的球心彼此分开。为控制不同尺度之间的重叠，递归定义

$$A_{s,n} = H_{s,n} \setminus \bigcup_{m<n,\ t\in T} V_{t,m}, \qquad V_{s,n} = \bigcup_{x\in A_{s,n}} B(x, r_n).$$

注意 $A_{s,n}$ 是保留的球心集合，不要求它开；真正作为加细成员的是开集 $V_{s,n}$。由球心的选取，每个 $V_{s,n} \subseteq U_s$。

先证明这些开集确实覆盖 X。给定 x，取包含它的第一个 U_s，再取 n 足够大使 $B(x, 3r_n) \subseteq U_s$。此时 $x \in H_{s,n}$。若先前某一尺度已覆盖 x，则无需再处理；否则 $x \in A_{s,n}$，所以 $x \in V_{s,n}$。这说明删除操作没有留下任何漏点。

再固定尺度 n。若 $s < t$，球心 $a \in A_{s,n}$ 周围半径 $3r_n$ 的球在 U_s 内，而 $b \in A_{t,n} \subseteq H_{t,n}$ 位于 U_s 外，因此 $d(a, b) \geq 3r_n$。两侧各向外扩展半径 r_n 后，不同的 $V_{s,n}, V_{t,n}$ 之间距离仍至少为 r_n。于是任一半径小于 $r_n/2$ 的球至多与这一层的一个成员相交。

最后还要同时控制所有尺度。给定点 c，由覆盖性选 $c \in V_{s,n}$，再取 $B(c, R) \subseteq V_{s,n}$。选择 $N > n$，使 $k > N$ 时 $r_k < R/4$。第 $k > N$ 层的所有保留球心都已避开 $V_{s,n}$，从而到 c 的距离至少为 R；以它们为心、半径 r_k 的球便都避开 $B(c, R/2)$。

把 $B(c, R/2)$ 再缩小，使其半径也小于每个 $r_i/2$，$1 \leq i \leq N$。这个邻域与前 N 层中的每层至多一个成员相交，同时避开所有后续层。因此整个加细局部有限。 □

若正则空间有 σ-局部有限基 $\bigcup_n \mathcal{B}_n$，就可以像第二可数情形一样证明正规性。给定闭集 $F \subseteq U$ 且 U 开，令

$$W_n = \bigcup \{V \in \mathcal{B}_n : \overline{V} \subseteq U\}.$$

正则性和基的性质保证这些 W_n 覆盖 F；而每一层局部有限，刚证的闭包公式给出

$$\overline{W_n} = \bigcup \{\overline{V} : V \in \mathcal{B}_n,\ \overline{V} \subseteq U\} \subseteq U.$$

于是引理 8.2.1 再次适用。这一步使我们能够继续使用 Urysohn 函数，只是现在把同一局部有限层中的函数先合在一起，再对可数个层次求和。

定理 8.2.6 (Nagata–Smirnov 可度量化定理)**.** 空间可度量化，当且仅当它是正则 Hausdorff 空间，且有 σ-局部有限基。

证明. 先设空间可度量化。对每个 $n \geq 1$，将全体半径为 $1/n$ 的球构成的覆盖加细为局部有限开覆盖 $\mathcal{B}_n$，这由定理 8.2.5 保证。各层的并构成基：给定 $x \in U$ 且 U 开，取 n 使 $B(x, 2/n) \subseteq U$；若 $V \in \mathcal{B}_n$ 包含 x，则 V 位于某个半径为 $1/n$ 的球中，故 $V \subseteq B(x, 2/n) \subseteq U$。度量空间又正则且 Hausdorff，因此必要性成立。

反过来，将基写成 $\bigcup_n \mathcal{B}_n$，其中 $\mathcal{B}_n = \{V_{n,t} : t \in T_n\}$ 局部有限。上一段论证已保证空间正规。固定 m, n, t，令

$$W_{m,n,t} = \bigcup \{V \in \mathcal{B}_m : \overline{V} \subseteq V_{n,t}\}.$$

这个集合把第 m 层中闭包能够放进 $V_{n,t}$ 的基本开集全收在一起。由局部有限性，$\overline{W_{m,n,t}} \subseteq V_{n,t}$，所以可取连续函数 $f_{m,n,t} : X \to [0,1]$，在此闭包上为 1，在 $X \setminus V_{n,t}$ 上为 0。

同一对层次 (m, n) 中，函数可能有不可数多个，但对固定的两点 x, y，只有有限多个 $V_{n,t}$ 包含它们，因此下面第一式只有有限多个非零项。令

$$d_{mn}(x, y) = \sum_{t \in T_n} |f_{m,n,t}(x) - f_{m,n,t}(y)|,$$

$$d(x, y) = \sum_{m,n \geq 1} 2^{-(m+n)} \frac{d_{mn}(x, y)}{1 + d_{mn}(x, y)}.$$

每个 d_{mn} 满足对称性、三角不等式以及 $d_{mn}(x, x) = 0$，只是可能不分离点，所以它是一个伪度量。它在 $X \times X$ 上连续：在 x, y 附近分别选取只遇到有限个 $V_{n,t}$ 的邻域，则在这两个邻域的乘积中，求和一直只有同样有限多个可能非零的项。

各 d_{mn} 未必有统一上界，这就是第二式先用 $u/(1+u)$ 将它们压到 $[0, 1)$ 的原因。这个函数递增且次可加，因为对 $a, b \geq 0$，

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} \geq \frac{a}{1+a+b} + \frac{b}{1+a+b} = \frac{a+b}{1+a+b}.$$

因此压缩后的每项仍满足三角不等式，外层级数也满足；权重之和有限又保证一致收敛。

最后一并验证正定性和拓扑相容性。给定 $x \in U$ 且 U 开，用基与正则性选取

$$x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq V_{n,t} \subseteq U, \qquad V \in \mathcal{B}_m.$$

于是 $x \in W_{m,n,t}$，相应函数在 x 上取 1，在 U 外取 0。所以对 $y \notin U$，有 $d_{mn}(x, y) \geq 1$，从而

$$d(x, y) \geq 2^{-(m+n)} \frac{1}{2} = 2^{-(m+n+1)}.$$

对不同点取不含 y 的 x 的开邻域，就得到 $d(x, y) > 0$；对任意原邻域 U，同一估计又给出一个包含于 U 的 d-开球。反过来，由一致收敛，每个 $d(x, -)$ 在原拓扑下连续，所以 d-开球原本就开。由此 d 是恰好诱导原拓扑的度量。 □

8.2.2 可度量化流形

定义 6.3.6 只要求流形为 Hausdorff 且局部欧氏，并未假设第二可数。局部坐标卡各自都有可数基，但坐标卡可能需要不可数多个，因此还不能直接把这些基合成一个可数基。

对连通流形，度量带来的局部有限覆盖能够从一个坐标区域出发，逐步扩展到整个空间，从而得到所需的整体可数性。

定理 8.2.7 (连通流形的可度量化判定)**.** 对连通的 N 维流形，其中 $N \geq 1$，下列条件等价：可度量化；具有可数紧子集覆盖；具有可数开覆盖 (U_n)，使每个 $\overline{U_n}$ 紧且 $\overline{U_n} \subseteq U_{n+1}$；第二可数。

证明. 先记录局部欧氏性提供的邻域。在坐标卡内可取一个闭球仍留在坐标像内部的小开球；闭球的逆像紧，且因空间 Hausdorff 而在全空间中闭。因此每一点在任意给定开邻域内，都有闭包紧且仍包含于该邻域的开邻域。特别地，流形正则。

设 X 可度量化。将这些相对紧开邻域构成的覆盖加细为局部有限开覆盖 (V_i)，去掉空成员。每个 V_i 包含于某个相对紧开邻域，所以其闭包也紧。局部有限性意味着每个紧集只与有限多个 V_j 相交：在紧集的每一点附近选局部有限性给出的邻域，再取有限子覆盖即可。

从一个 V_{i_0} 开始，设 $I_1 = \{i_0\}$。已选有限指标集 I_n 后，令

$$K_n = \bigcup_{i \in I_n} \overline{V_i}, \qquad I_{n+1} = I_n \cup \{j : V_j \cap K_n \neq \varnothing\}.$$

由上一段，I_{n+1} 仍有限，所以 K_n 紧。K_n 的每个点都属于某个与 K_n 相交的覆盖成员，而该成员在下一步已被选入，故

$$K_n \subseteq \bigcup_{j \in I_{n+1}} V_j \subseteq \operatorname{int} K_{n+1}.$$

于是 $L = \bigcup_n K_n$ 开。另一方面，$(\overline{V_i})$ 仍局部有限，L 是这个闭集族的某个子族之并，所以也闭。它非空，由 X 连通可知 $L = X$。这就得到可数紧子集覆盖；连通性恰好用在由一个起始区域扩展到整个空间这一步。

给定任意紧集覆盖 (K_n)，先用有限个相对紧开坐标邻域覆盖 K_1，令其并为 U_1。递归地，用有限个这样的邻域覆盖紧集 $K_{n+1} \cup \overline{U_n}$，令其并为 U_{n+1}。这样每个 $\overline{U_n}$ 都紧，且 $\overline{U_n} \subseteq U_{n+1}$，并且各 U_n 覆盖 X。反过来，具有此性质的开覆盖的紧闭包当然也是可数紧覆盖。

若有可数紧覆盖，每个紧集都能由有限个开坐标邻域覆盖，故共有可数个开坐标邻域覆盖 X。把它们的欧氏可数基经坐标映射拉回，再取并，就得到 X 的可数基：任意开集与任一坐标邻域相交仍开，可以在该坐标基中逐点细化。因此空间第二可数。

最后，流形已知正则且 Hausdorff，第二可数性由定理 8.2.2 推出可度量化性。四个条件于是等价。 □

第九章

紧 Hausdorff 空间（二）

先前我们用开覆盖和网研究了紧性；上一章又利用连续实函数构造了度量。接下来我们换一个角度：紧 Hausdorff 空间中的每个超滤都有唯一极限，因而“取极限”本身可以看作一个运算。有了这个观点，我们再研究怎样给一个非紧空间添入极限点，使它成为紧空间。连续实函数将告诉我们何时能够这样做、怎样得到最大的紧化；局部紧性则决定能否只添入一个点。最后，我们用紧化中的 G_δ 集把拓扑完备性与紧性联系起来。

9.1 超滤

先考虑一个收敛网 (x_d)。如果我们只关心它是否收敛，其实不必记住每个指标对应哪一点；只须知道哪些集合包含了它的某个尾部。这样的集合族有几个共同特点：两个最终成立的条件可以同时成立，较大的集合仍然最终包含这个网，而空集不可能包含一个尾部。滤子的公理正是把这些特点单独写出来。这样做还有一个好处：讨论紧性时，我们可以直接扩大一个彼此相容的集合族，而不必同时构造新的指标集。

定义 9.1.1 (滤子与超滤)**.** X 上的滤子 $\mathcal{F}$ 是包含 X、不包含 $\varnothing$，且对有限交封闭、对包含关系向上封闭的子集族。按包含关系的极大滤子称为超滤。记 X 上全体超滤组成的集合为 $\mathsf{U}(X)$。点 x 生成的主超滤为 $\uparrow x = \{A \subseteq X : x \in A\}$。

若集族 $\mathcal{B}$ 具有有限交性质，想让它成为滤子，就必须补入有限交及这些有限交的所有超集。如此得到的集合族确实是滤子，而且是包含 $\mathcal{B}$ 的最小滤子；有限交性质恰好保证这一步不会补入空集。非空滤子族的交仍为滤子。若一族滤子按包含关系定向，则任意有限个成员都能放进同一个滤子中检查，所以它们的并仍为滤子。特别地，包含一个给定滤子的链有上界，Zorn 引理因而保证它可以扩充为超滤。

主超滤把所有条件集中在一个点上，但无限集还有另一种重要的出发点：由所有有限补集组成的 Fréchet 滤子。它对每个 x 都包含 $X \setminus \{x\}$，因而不可能包含于任何主超滤。将它扩充后得到的超滤也不会来自某个固定的点。

“极大”看起来需要比较很多滤子。我们希望将它改成对 X 的子集逐个检验的条件。若一个集合 A 与已有条件始终相容，就应该能够把它加入；超滤的极大性迫使它已经在其中。进一步，这会使 A 和它的补集之间恰有一个被选中。

命题 9.1.2 (超滤判定)**.** 对滤子 $\mathcal{F}$，下列条件等价：它是超滤；每个与 $\mathcal{F}$ 的所有成员都相交的集合都属于 $\mathcal{F}$；由 $A \cup B \in \mathcal{F}$ 可推出 $A \in \mathcal{F}$ 或 $B \in \mathcal{F}$；对每个 $A \subseteq X$，$A, X \setminus A$ 中恰有一个属于 $\mathcal{F}$。每个滤子都是所有包含它的超滤之交。

证明. 与滤子每个成员都相交的集合可以加入，而不破坏有限交性质，所以极大性迫使它原本就在滤子中。若 A、B 都不属于这样的滤子，则可分别选取与它们不交的滤子成

员；这两个成员的交避开 $A\cup B$，故得到并集判定。将该判定用于 $X=A\cup(X\setminus A)$，得到二选一性质。该性质不允许滤子的真扩充，因为加入缺失集合，就同时包含了某个已有成员的补集。最后，若 $A\notin\mathcal{F}$，则集族 $\mathcal{F}\cup\{X\setminus A\}$ 具有有限交性质，否则某个滤子成员会包含于 A。将它扩充为超滤，便得到一个不含 A 的超滤，从而证明交集断言。 □

9.1.1 收敛与紧性

对网来说，收敛于 x 意味着每个 x 的邻域最终包含整个网；成为聚点则只要求每个尾部仍能进入该邻域。改用最终集合族后，前者要求邻域已经属于滤子，后者只要求邻域与滤子中的每个集合相交。这两个条件的强弱差别仍然保留着。

定义 9.1.3 (滤子的极限与聚点)**.** 若 $\mathcal{N}(x)\subseteq\mathcal{F}$，则称滤子 $\mathcal{F}$ 收敛到 x。若 $\mathcal{F}$ 的每个成员都与 x 的每个邻域相交，则称 x 为其聚点。分别记极限集与聚点集为 $\lim\mathcal{F}$ 和 $\operatorname{adh}\mathcal{F}$。

直接由定义可得

$$\operatorname{adh}\mathcal{F}=\bigcap_{A\in\mathcal{F}}\overline{A},\qquad \mathcal{F}\subseteq\mathcal{G}\Longrightarrow\lim\mathcal{F}\subseteq\lim\mathcal{G},\quad \operatorname{adh}\mathcal{G}\subseteq\operatorname{adh}\mathcal{F}.$$

增大滤子意味着更多集合被列为最终包含网的集合；它更可能包含某点的全部邻域，故极限集扩大。聚点却必须与新增的每个成员相容，故聚点集缩小。对超滤，这两个概念恰好一致：若每个邻域都与它的所有成员相交，命题 9.1.2 就保证每个邻域已在超滤中。我们还可以用超滤检验闭包：

$$x\in\overline{A}\quad\Longleftrightarrow\quad\text{存在包含 }A\text{ 的超滤收敛于 }x.$$

事实上，$\{A\}\cup\mathcal{N}(x)$ 具有有限交性质，当且仅当 $x\in\overline{A}$；将该集族扩充为超滤就得到正向蕴含。反过来，若超滤同时包含 A 与 x 的每个邻域，它们的交就不可能为空，故 $x\in\overline{A}$。这给我们一个常用做法：要把闭包问题化成收敛问题，就选择一个包含该集合的超滤。

接下来，怎样把 X 上的滤子沿 $f:X\to Y$ 送到 Y 上？我们希望 $B\subseteq Y$ 是一个最终条件，当且仅当 $f^{-1}(B)$ 在原来就是最终条件。因此定义

$$f(\mathcal{F})=\{B\subseteq Y:f^{-1}(B)\in\mathcal{F}\}.$$

逆像保持交与补集，所以这是滤子；由二选一判定，超滤的像仍是超滤。

连续映射保持滤子收敛：若 $\mathcal{F}\to x$，则 $f(x)$ 的每个邻域的逆像都是 x 的邻域，故像滤子收敛到 $f(x)$。反过来，实际上只要映射保持超滤收敛，它就连续。为此取闭集 $A\subseteq Y$ 及 $x\in\overline{f^{-1}(A)}$，利用上一段的闭包判别，选择包含 $f^{-1}(A)$ 且收敛到 x 的超滤 $\mathcal{G}$。其像包含 A，又收敛到 $f(x)$；闭性迫使 $f(x)\in A$，即 $x\in f^{-1}(A)$。所以闭集的逆像闭，连续性得证。

前面从网得到滤子的想法可以反过来实施。对网 (x_d)，令 $\mathcal{F}_x$ 为所有包含某个尾部的集合构成的滤子。若给定滤子 $\mathcal{F}$，我们想构造一个网，使每个 $A\in\mathcal{F}$ 最终包含它。于是指标不仅记录一个点，还记录当前要满足的集合条件：令

$$D_{\mathcal{F}}=\{(x,A):x\in A\in\mathcal{F}\},\qquad (x,A)\le(y,B)\iff B\subseteq A,$$

并取网 $(x,A)\mapsto x$。两个指标之后可以用 $A\cap B$ 中的一点作为共同后继，故这是定向预序集。这个网的最终集合滤子恰为 $\mathcal{F}$：(x,A) 之后的尾部位于 A 中，而 A 的每个点都出现在某个不小于 (x,A) 的指标处。这些构造同时保持极限与聚点，因为“最终在某邻域中”与“每个尾部都与某邻域相交”，正好变成前述两个滤子条件。

紧性要求闭集族的有限相交条件能够给出公共点，这与滤子的公理正好相配；Hausdorff 性则负责排除两个不同的极限。因此，“每个超滤恰有一个极限”会同时表达这两种性质。

定理 9.1.4 (超滤刻画)**.** 空间紧，当且仅当每个滤子都有聚点，也当且仅当每个超滤都收敛。空间为 Hausdorff 空间，当且仅当每个超滤至多有一个极限。因此，空间为紧 Hausdorff 空间，当且仅当每个超滤恰有一个极限。

证明. 在紧空间中，对 $A\in\mathcal{F}$ 取闭集 $\overline{A}$。任意有限个 A 的交都非空，因此这些闭包具有有限交性质，交集中一点就是滤子的聚点。超滤的聚点又都是极限。若每个超滤收敛，将任意滤子扩充为超滤，所得极限也与原滤子的每个成员相容，故原滤子有聚点。这补齐了两个滤子条件之间的等价。反过来，将任意具有有限交性质的闭集族扩充为超滤，其任一极限都属于原先所有闭集，因而得到紧性。在 Hausdorff 空间中，不交邻域排除了同一滤子有两个极限的可能。若 $x\neq y$ 无法分离，则 $\mathcal{N}(x)\cup\mathcal{N}(y)$ 具有有限交性质；其扩充超滤会同时收敛到两点。 □

9.1.2 超滤极限的代数结构

在紧 Hausdorff 空间中，给每个超滤指定它的唯一极限，就得到一个真正的映射 $c:\mathsf{U}(X)\to X$。接下来问：如果只给我们这个映射，而不告诉我们哪些集合开，能不能恢复原拓扑？主超滤的极限应当是生成它的点，这是第一个要求。第二个要求涉及两层取极限：先有一族 X 上的超滤，再用一个超滤 $\mathfrak{U}$ 描述这一族怎样变化。我们可以先对各个超滤取极限，再对得到的像超滤取极限；也可以先把两层集合条件合成一层。需要准确说明的，就是后一种合成。对 $A\subseteq X$，令 $\widehat{A}=\{\mathcal{G}\in\mathsf{U}(X):A\in\mathcal{G}\}$。若 $\mathfrak{U}\in\mathsf{U}(\mathsf{U}(X))$，定义

$$\sigma(\mathfrak{U})=\{A\subseteq X:\widehat{A}\in\mathfrak{U}\}=\bigcup_{\mathcal{A}\in\mathfrak{U}}\bigcap_{\mathcal{G}\in\mathcal{A}}\mathcal{G}.$$

这里 $A\in\sigma(\mathfrak{U})$ 的意思是：“包含 A 的那些超滤”组成的集合属于 $\mathfrak{U}$。因此 σ 将两层最终条件合为 X 上的一层条件。等式 $\widehat{A\cap B}=\widehat{A}\cap\widehat{B}$、$\widehat{X\setminus A}=\mathsf{U}(X)\setminus\widehat{A}$ 保证 $\sigma(\mathfrak{U})$ 仍是超滤。右侧的并交式也表达同一条件：存在 $\mathcal{A}\in\mathfrak{U}$，其中每个超滤都包含 A，当且仅当 $\widehat{A}\in\mathfrak{U}$。对映射 f，记 $\mathsf{U}(f)(\mathcal{G})=f(\mathcal{G})$，并记 $\eta_X(x)=\uparrow x$。特别注意，$\mathsf{U}(c)(\mathfrak{U})$ 是 X 上的超滤，而 $c(\mathsf{U}(c)(\mathfrak{U}))$ 才是 X 中的点。

定理 9.1.5 (以极限运算刻画紧 Hausdorff 拓扑)**.** 非空紧 Hausdorff 空间的极限映射 $c:\mathsf{U}(X)\to X$ 满足 $c\eta_X=\mathrm{id}_X$ 与 $c\sigma=c\mathsf{U}(c)$。反过来，任意满足这两个等式的映射 c 都在 X 上确定唯一的紧 Hausdorff 拓扑，使 $c(\mathcal{G})$ 为 $\mathcal{G}$ 的极限。

左图说主超滤的极限是原点；右图比较 “先合成，再取极限” 与 “先取各个极限，再取极限”。这两个条件便刻画了紧 Hausdorff 拓扑：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & \mathsf{U}(X) \\ & \searrow^{\mathrm{id}_X} & \downarrow{\scriptstyle c} \\ & & X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathsf{U}(\mathsf{U}(X)) & \xrightarrow{\sigma} & \mathsf{U}(X) \\ {\scriptstyle \mathsf{U}(c)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle c} \\ \mathsf{U}(X) & \xrightarrow[c]{} & X \end{array} \tag{9.1.1}$$

证明. 先从已有的紧 Hausdorff 拓扑出发。主超滤 $\uparrow x$ 收敛到 x，所以第一个等式成立。给定 $\mathfrak{U} \in \mathsf{U}(\mathsf{U}(X))$，令 $x = c(\mathsf{U}(c)(\mathfrak{U}))$。若 V 是 x 的开邻域，则像超滤的收敛性给出 $c^{-1}(V) \in \mathfrak{U}$。对每个 $\mathcal{G} \in c^{-1}(V)$，它的极限 $c(\mathcal{G})$ 位于开集 V 中，因此 $V \in \mathcal{G}$。这说明 $c^{-1}(V) \subseteq \widehat{V}$，从而 $\widehat{V} \in \mathfrak{U}$，即 $V \in \sigma(\mathfrak{U})$。所以 $\sigma(\mathfrak{U})$ 也收敛到 x，由极限唯一性得到 $c\sigma = c\mathsf{U}(c)$。

反过来，只给定满足两个等式的映射 c。先前的闭包判别提示我们定义

$$\operatorname{cl} A = \{c(\mathcal{G}) : A \in \mathcal{G}\}.$$

因为没有超滤包含空集，$\operatorname{cl}\varnothing = \varnothing$；超滤包含 $A \cup B$ 当且仅当包含其中之一，所以此运算保持二元并；主超滤又给出 $A \subseteq \operatorname{cl} A$。真正需要第二个等式的地方是幂等性：一个 “闭包中点的极限”，必须仍是原集合中点的极限。

取 $x \in \operatorname{cl}(\operatorname{cl} A)$，选择超滤 $\mathcal{G}$ 使 $\operatorname{cl} A \in \mathcal{G}$ 且 $c(\mathcal{G}) = x$。对每个 $z \in \operatorname{cl} A$，选 $\mathcal{G}_z$ 使 $A \in \mathcal{G}_z$、$c(\mathcal{G}_z) = z$；对其他 z，令 $\mathcal{G}_z = \uparrow z$。记 $h(z) = \mathcal{G}_z$，则 $ch = \mathrm{id}_X$。令 $\mathfrak{U} = \mathsf{U}(h)(\mathcal{G})$，于是

$$\mathsf{U}(c)(\mathfrak{U}) = \mathsf{U}(ch)(\mathcal{G}) = \mathcal{G}, \qquad \widehat{A} \in \mathfrak{U}.$$

后一个条件来自 $h^{-1}(\widehat{A}) \supseteq \operatorname{cl} A \in \mathcal{G}$。所以 $A \in \sigma(\mathfrak{U})$，再用兼容等式得到

$$x = c(\mathcal{G}) = c(\mathsf{U}(c)(\mathfrak{U})) = c(\sigma(\mathfrak{U})) \in \operatorname{cl} A.$$

闭包公理因而全部成立，确定了一个拓扑。

还有一件事不能省略：刚构造的拓扑是否真的以 c 为唯一极限运算？对每个 $A \in \mathcal{G}$，定义直接给出 $c(\mathcal{G}) \in \operatorname{cl} A$，所以它是聚点，继而是超滤的极限。

要排除另一个极限 x，设 $\mathcal{G} \to x$。对每个 $A \in \mathcal{G}$，有 $x \in \operatorname{cl} A$，于是可选 $\mathcal{G}_A$ 使 $A \in \mathcal{G}_A$ 且 $c(\mathcal{G}_A) = x$。这些新超滤全都被 c 送到 x，但它们仍逐步满足原来 $\mathcal{G}$ 的条件。准确地说，令 $K(A) = \{\mathcal{G}_B : B \in \mathcal{G},\ B \subseteq A\}$。任意有限个这样的集合都包含 $\mathcal{G}_{A_1 \cap \cdots \cap A_m}$，因此具有有限交性质，可以扩充为 $\mathsf{U}(X)$ 上的超滤 $\mathfrak{U}$。由于 $c(K(A)) = \{x\}$，有 $\mathsf{U}(c)(\mathfrak{U}) = \uparrow x$。另一方面，$K(A) \subseteq \widehat{A}$ 给出 $A \in \sigma(\mathfrak{U})$，所以 $\mathcal{G} \subseteq \sigma(\mathfrak{U})$；两者都是超滤，必相等。于是

$$c(\mathcal{G}) = c(\sigma(\mathfrak{U})) = c(\mathsf{U}(c)(\mathfrak{U})) = c(\uparrow x) = x.$$

所以每个超滤恰有指定的唯一极限。定理 9.1.4 给出紧性及 Hausdorff 性，闭包公式则保证拓扑唯一。 □

9.2 Tychonoff 空间

若一个空间已经嵌入紧 Hausdorff 空间，只需对它取闭包，就得到了一个紧空间，并且原空间在其中稠密。这提示我们：构造紧化，首先要解决的不是 “添哪些点”，而是 “能否先把原空间嵌进去”。紧 Hausdorff 空间正规，但正规性不保持到任意子空间，因此不

能直接用正规性回答这个问题。连续实函数却能限制到子空间上。我们将把点与闭集的分离要求写成一个实函数的取值条件，再用全部这样的函数构造嵌入。

定义 9.2.1 (紧化与完全正则性). X 的一个紧化是紧空间 Y，以及像稠密的嵌入 $c : X \to Y$。若 Y 为 Hausdorff 空间，则称为 Hausdorff 紧化；$Y \setminus c(X)$ 称为其余部。若对每个开集中的点 $x \in U$，都有连续函数 $f : X \to [0,1]$ 满足 $f(x) = 0$ 和 $f(X \setminus U) \subseteq \{1\}$，则称空间完全正则。完全正则的 T_0 空间称为 Tychonoff 空间。

这个函数将 x 放在取值 0 的一端，将 U 外的点放在取值 1 的另一端，中间的阈值便给出可以缩小的邻域。例如

$$x \in f^{-1}[0,1/2), \qquad \overline{f^{-1}[0,1/2)} \subseteq f^{-1}[0,1/2] \subseteq U,$$

所以完全正则性蕴含正则性。由 Urysohn 引理，正规 Hausdorff 空间都是 Tychonoff 空间。但这些条件并不等价：Sorgenfrey 平面是 Tychonoff 空间，却不正规。这里保留 T_0 条件也有实际作用：连续函数不仅要描述邻域，还要能区分不同的点。

为了把这件事写成嵌入，我们给每个函数安排一个坐标。映射 $x \mapsto (f_i(x))_i$ 是否保留原拓扑，取决于原来的开集能否由各个 f_i 的开逆像生成。若映射族 $(f_i : X \to Y_i)$ 生成的初始拓扑恰为 X 原有的拓扑，就称它为初始源。由于乘积拓扑只使用有限个坐标，这等价于对角映射 $\Delta_i f_i : X \to \prod_i Y_i$ 是初始映射。再加上单射性，它就是嵌入。

引理 9.2.2 (用实函数识别拓扑). 令 $A_X = C(X,[0,1])$。空间完全正则，当且仅当 $(f : X \to [0,1])_{f \in A_X}$ 是初始源。完全正则性保持到子空间与任意乘积。

证明. 若 X 完全正则，则每个开集 U 都是定义中给出的集合 $f^{-1}[0,1)$ 的并，所以这些函数生成原拓扑。反过来，在 U 内取基本初始邻域

$$x \in B = \bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(O_i) \subseteq U.$$

我们先分别处理每个坐标。由 $[0,1]$ 上的 Urysohn 引理，存在连续 $u_i : [0,1] \to [0,1]$，使 $u_i(f_i(x)) = 0$，且 u_i 在 $[0,1] \setminus O_i$ 上等于 1。然后令 $f = \max_i(u_i \circ f_i)$。在 x 处所有项均为零；在 B 外至少有一个坐标离开 O_i，相应一项等于 1，所以 $f = 1$。这正是完全正则性所需的函数。若基本邻域为 X，取常零函数即可。对子空间，将母空间邻域对应的分离函数限制下来即可。对乘积，基本邻域只限制有限个坐标，取相应分离函数的最大值即得所需函数。 □

引理已经解决了拓扑是否被恢复的问题，剩下只须检验不同点能否得到不同坐标。若 $x \neq y$，T_0 条件给出只含其中一点的开集，完全正则性再给出在这两点分别取 $0,1$ 的函数。因此全部 $[0,1]$ 值连续函数组成的对角映射就是所需嵌入。

定理 9.2.3 (立方体嵌入与紧化). 对空间 X，下列条件等价：X 是 Tychonoff 空间；X 可嵌入某个立方体 $[0,1]^I$；X 可嵌入紧 Hausdorff 空间；X 有 Hausdorff 紧化。

证明. 映射 $k_X : X \to [0,1]^{A_X}$ 定义为 $k_X(x)(f) = f(x)$。由引理它是初始映射，由 T_0 条件与完全正则性，它又是单射，因而是嵌入。Tychonoff 定理保证立方体紧且 Hausdorff。

在紧 Hausdorff 空间中，对嵌入像取闭包就得到紧化。反过来，紧 Hausdorff 空间正规，因而为 Tychonoff 空间；由引理及 T_0 的遗传性，其子空间也是 Tychonoff 空间。 □

这一定理保证了紧化存在，但没有说紧化唯一。仍以 $(0,1)$ 为例：直接添入两个端点得到 $[0,1]$；再把这两个端点粘合，就得到圆周，原区间成为去掉一点的圆周。也可以把同一个区间嵌入平面，令 $x \mapsto (x, \sin(1/x))$，再在紧矩形 $[0,1]\times[-1,1]$ 中取闭包。此时余部除了 $x=1$ 处的端点 $(1,\sin 1)$，还包含 $\{0\}\times[-1,1]$ 的整条线段：趋于 0 的不同过程可以使第二坐标趋于不同值。所以紧化中的边界不只由原区间看起来有几个“端”决定；我们选择观察哪些连续函数，也会决定哪些趋近方式被区分开。下一节就把所有 $[0,1]$ 值连续函数一起保留下来。

9.3 Stone–Čech 紧化

上一节的立方体嵌入还有一个尚未使用的特点：原来每个连续函数 $f: X \to [0,1]$ 都成为了一个坐标投影。因此，在嵌入像的闭包上，不需要猜测边界点处的函数值，直接读取对应坐标即可。我们希望构造一个紧化，使所有这样的函数同时延拓。采用全部连续函数作为坐标，正是为了满足这一要求。接下来还会看到，$[0,1]$ 值函数的延拓已经足以给出向任意紧 Hausdorff 空间的延拓。对任意拓扑空间 X，令 $A_X = C(X,[0,1])$，并定义

$$k_X(x) = (f(x))_{f\in A_X}, \qquad \beta X = \overline{k_X(X)} \subseteq [0,1]^{A_X}, \qquad \eta_X : X \longrightarrow \beta X.$$

这里 η_X 是将 k_X 的陪域限制后所得的映射，其像稠密；βX 是紧 Hausdorff 立方体的闭子空间，因而也紧且 Hausdorff。由定理 9.2.3，η_X 是嵌入当且仅当 X 为 Tychonoff 空间。若 X 本身紧且 Hausdorff，嵌入像还闭，既闭又稠密，只能等于整个 βX，所以 η_X 是同胚。注意我们暂时允许任意 X，因而在未假定 Tychonoff 性时，不能先把 X 当成 βX 的子空间。

定理 9.3.1 (普遍延拓性质)**.** 对每个连续映射 $f: X \to Y$，若 Y 紧且 Hausdorff，则存在唯一的连续映射 $f^*: \beta X \to Y$，满足 $f^*\eta_X = f$。若 X 为 Tychonoff 空间，则 $(\beta X, \eta_X)$ 称为其 Stone–Čech 紧化。

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & \beta X \\ & \searrow^{f} & \downarrow{\scriptstyle f^*} \\ & & Y \end{array} \tag{9.3.1}$$

证明. 先处理值域 $[0,1]$。每个 $h: X \to [0,1]$ 都有坐标延拓 $h^* = p_h|_{\beta X}$，因为 $p_h\eta_X = h$。任何两个连续延拓在稠密集 $\eta_X(X)$ 上一致，而值域 Hausdorff，故处处一致。

对一般的紧 Hausdorff 空间 Y，我们还没有直接定义边界点的像。先将 Y 嵌入立方体，便可逐个构造它的坐标：对每个 $h \in A_Y$ 延拓 $h\circ f$，再令

$$g = ((h\circ f)^*)_{h\in A_Y} : \beta X \longrightarrow [0,1]^{A_Y}.$$

每个坐标连续，所以 g 连续。下面的图表示，各坐标限制回 X 后都等于原来 f 的对应坐标：

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & \beta X & & \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} & \searrow^{(hf)^*} & \\ Y & \xrightarrow[k_Y]{} & [0,1]^{A_Y} & \xrightarrow[p_h]{} & [0,1]. \end{array} \tag{9.3.2}$$

但得到立方体中的点还不够，必须确认 g 的值真的落在 $k_Y(Y)$ 内。由稠密性与连续性，

$$g(\beta X) \subseteq \overline{g\eta_X(X)} = \overline{k_Y f(X)} \subseteq k_Y(Y).$$

最后一步正是紧 Hausdorff 条件的用处：$k_Y(Y)$ 紧，在 Hausdorff 立方体中闭。因此可以取 $f^* = k_Y^{-1} g$，它连续且满足所需等式。唯一性仍来自稠密像上的一致性。 □

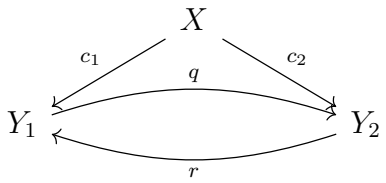
对非 Tychonoff 空间，这一构造仍有意义，只是 η_X 未必将 X 嵌入。例如，若非空空间上的每个连续实函数都恒定，则 βX 只有一个点。

9.3.1 紧化之间的序

例如从 $[0,1]$ 到圆周的粘合映射，在原区间上不改变任何点，却把两个边界点变成同一点。我们将这种“固定原空间、合并边界”的方向作为比较紧化的依据；箭头的出发点称为较大的紧化。

定义 9.3.2 (Hausdorff 紧化的比较与等价)**.** 对 X 的 Hausdorff 紧化 (Y_i, c_i)，若存在连续映射 $q : Y_1 \to Y_2$ 满足 $qc_1 = c_2$，则记 $(Y_2, c_2) \preceq (Y_1, c_1)$。若这样的 q 可取为同胚，则称两个紧化等价。

由稠密性，q 唯一；它的紧像包含稠密集 $c_2(X)$，所以它还是满射。若两个方向都有这样的映射，则复合在稠密集上为恒等，因而处处为恒等，故两个紧化等价。这些关系可用下图表示：



(9.3.3)

由定理 9.3.1，βX 是最大的 Hausdorff 紧化。延拓性质还可以反过来刻画它。

命题 9.3.3 (Stone–Čech 紧化的延拓刻画)**.** 对 Tychonoff 空间的 Hausdorff 紧化 (Y, c)，下列条件等价：它等价于 βX；从 X 到任意紧 Hausdorff 空间的每个连续映射都能延拓到 Y；每个连续映射 $X \to [0,1]$ 都能延拓到 Y。

证明. 普遍延拓性质已经给出第一个条件到第二个的蕴涵，而第二个当然包含第三个。设第三个成立，将 k_X 的每个坐标连续延拓到 Y，取对角映射 $g : Y \to [0,1]^{A_X}$。因为 $c(X)$ 稠密，$g(Y) \subseteq \overline{k_X(X)} = \beta X$，且 $gc = \eta_X$，所以 $\beta X \preceq Y$。另一方面，βX 的普遍性质给出 $Y \preceq \beta X$。两个比较映射的复合在原空间的稠密像上都是恒等映射，因而处处是恒等；所以它们互逆，两个紧化等价。 □

还有一种检验延拓的办法，不必预先写出边界点处的函数值。若 f 在两组点上分别取相隔的值，而这两组点在新空间中趋近同一点，连续延拓就不可能存在，因为该点的值被迫同时接近两个互不相交的闭集。下面证明，这也是唯一的障碍。

引理 9.3.4 (稠密子空间上的延拓)**.** 若 X 在 Y 中稠密，$f : X \to [0,1]$ 连续，则 f 能连续延拓到 Y，当且仅当对任意不交闭集 $A, B \subseteq [0,1]$，$f^{-1}(A), f^{-1}(B)$ 在 Y 中的闭包不交。

证明. 若存在延拓，这两个闭包分别位于不交的闭逆像中。反过来，固定 $y \in Y$。因为 X 稠密，每个邻域 V 都与 X 相交，所以闭集 $\overline{f(V \cap X)} \subseteq [0,1]$ 非空。有限个邻域的交仍是邻域，这些闭集具有有限交性质；紧性给出至少一个公共点。若公共点有两个不同值 a, b，取它们的不交闭邻域 A, B。由于 $a \in \overline{f(V \cap X)}$，$a$ 的开邻域 $\operatorname{int} A$ 与 $f(V \cap X)$ 相交，故每个 V 都与 $f^{-1}(A)$ 相交；于是 $y \in \operatorname{cl}_Y(f^{-1}(A))$。对 b 同理，违背假设。所以公共点唯一，记为 $g(y)$。这就是连续性所允许的唯一候选值。当 $y \in X$ 时，连续性保证 $g(y) = f(y)$。对 $[0,1]$ 中 $g(y)$ 的开邻域 O，取开集 O_0 使 $g(y) \in O_0 \subseteq \overline{O_0} \subseteq O$。由紧性，存在 y 的邻域 V 满足 $\overline{f(V \cap X)} \subseteq O_0$；否则所有这样的闭包与紧集 $[0,1] \setminus O_0$ 仍具有有限交性质，矛盾。可令 V 开。对 $z \in V$，其定义中的交包含于 $\overline{f(V \cap X)} \subseteq O$，所以 g 连续。 □

若一个连续的 $[0,1]$ 值函数在两个子集上分别为 0 与 1，则称这两个子集函数分离。一个 Hausdorff 紧化是 βX，当且仅当每对函数分离集的闭包都不交。必要性由延拓分离函数得到。对充分性，$[0,1]$ 中的不交闭集本身可用连续函数分离；将它与任意 $f : X \to [0,1]$ 复合，就能应用引理 9.3.4 及命题 9.3.3。

9.3.2 离散空间与其超滤

如果 X 离散，每个子集 A 的特征函数都是连续函数，因此在 βX 中仍能连续取值于 $\{0,1\}$。一个新增点对于每个 A 都必须选择落在 “A 的一边” 还是 “补集的一边”；有限交的兼容性又要求这些选择组成超滤。这就提示了下面的具体模型。

例 9.3.5 (超滤模型)**.** 对非空离散空间 X，在 $\mathsf{U}(X)$ 上取开闭集基 $\widehat{A} = \{\mathcal{G} : A \in \mathcal{G}\}$，其中 $A \subseteq X$。则映射 $x \mapsto\!\uparrow x$ 给出 βX。

证明. 有 $\widehat{A \cap B} = \widehat{A} \cap \widehat{B}$、$\widehat{A \cup B} = \widehat{A} \cup \widehat{B}$ 与 $\widehat{X \setminus A} = \mathsf{U}(X) \setminus \widehat{A}$。不同超滤可由某个 $\widehat{A}$ 及其补集分离。为验证紧性，先设基本开集覆盖 $\{\widehat{A_i}\}_i$ 没有有限子覆盖。任意有限个 A_i 的并都不能等于 X，否则相应帽号集合已覆盖所有超滤；因此 $\{X \setminus A_i\}_i$ 具有有限交性质。将这族补集扩充为超滤 $\mathcal{G}$，它就不属于任何 $\widehat{A_i}$，与覆盖矛盾。任意开覆盖都可细化为基本开覆盖，所以这已经证明紧性；也可将这组开闭集视为子基，应用 Alexander 引理。主超滤给出 X 的一个稠密副本，因为每个非空 $\widehat{A}$ 都包含主超滤，且 $\widehat{\{x\}} = \{\uparrow x\}$。对 $f : X \to [0,1]$，定义 $f^*(\mathcal{G}) = \lim f(\mathcal{G})$。若这个极限为开集中的点 $a \in O$，取 $a \in V \subseteq \overline{V} \subseteq O$，则 $A = f^{-1}(V) \in \mathcal{G}$。$\widehat{A}$ 中每个超滤的像极限都位于 $\overline{V} \subseteq O$，所以 f^* 连续且延拓 f。由前面的刻画命题完成证明。 □

取 $X=\mathbb{N}$，这个模型也说明：给可数离散空间作最大的紧化，会增加非常多的点。记录一个超滤对每个子集的选择，就得到连续单射

$$\beta\mathbb{N}\longrightarrow\{0,1\}^{\mathcal{P}(\mathbb{N})},\qquad \mathcal{G}\longmapsto(\mathbf{1}_{\{A\in\mathcal{G}\}})_{A\subseteq\mathbb{N}}.$$

由紧性及值域的 Hausdorff 性，这是闭嵌入。因此 $|\beta\mathbb{N}|\le 2^{\mathfrak{c}}$，其中 $\mathfrak{c}=2^{\aleph_0}$。反向不等式借助普遍性质。立方体 $\{0,1\}^{\mathbb{R}}$ 虽有不可数多个坐标，却有可数稠密集：取所有有理端点开区间的有限并的特征函数。这些函数只有可数多个；而基本开集只指定有限个实数处的 $0,1$ 值，可以用足够小的有理端点区间包住指定为 1 的点，并避开指定为 0 的点，所以这个集确实稠密。从离散的 $\mathbb{N}$ 到它的满射连续，因而延拓为 $\beta\mathbb{N}\to\{0,1\}^{\mathbb{R}}$。延拓像是包含该稠密集的紧闭集，只能是整个立方体。因此 $|\beta\mathbb{N}|\ge 2^{\mathfrak{c}}$，从而两者相等。

最后回到收敛。取由不同自然数组成的序列，并任取它的一个子列。令 A 为这个子列奇数项构成的集合，则奇数项的主超滤位于 $\widehat{A}$，偶数项位于它的开闭补集。若该子列收敛，其极限必落在这两个开集之一，序列就应最终进入其中，但另一半项始终在外，矛盾。因此原序列没有收敛子列，$\beta\mathbb{N}$ 是紧 Hausdorff 空间而不是序列紧空间。

9.4 局部紧性与最小 Hausdorff 紧化

Stone–Čech 紧化保留了全部连续实函数的延拓。现在尝试另一端：把边界中的所有点合成一个点 ∞。若还要求新空间 Hausdorff，就必须把每个原来的点 x 与 ∞ 分开；而新空间紧，∞ 的邻域之外应当只剩下一块紧的部分。于是 x 附近必须有足够小的紧邻域。下面先把这一局部条件写清楚，再检验单点紧化是否可行。

定义 9.4.1 (局部紧性)**.** 若每一点 x 的每个邻域 U 都包含该点的一个紧邻域 K，即对 x 有 $x\in\operatorname{int}K\subseteq K\subseteq U$，则称空间局部紧。

这里采用的是“每点有紧邻域基”的约定，不把紧性与 Hausdorff 性混在定义里。在 Hausdorff 空间中，每点有一个紧邻域就已足够：若 K 是 x 的紧邻域，在紧 Hausdorff 子空间 K 中用正则性，可把邻域缩小到其闭包包含于 $U\cap\operatorname{int}_X K$；该闭包既紧，又仍是 X 中 x 的邻域。同样，正则紧空间局部紧。对开子空间，在它内部继续缩小紧邻域；对闭子空间 A，将母空间中的紧邻域与 A 相交，仍是紧集。这分别说明局部紧性对开、闭子空间遗传。

欧氏空间中可使用足够小的闭球；流形的坐标邻域将这一构造带到每一点附近。$\mathbb{Q}$ 则没有这样的紧邻域：若 $K\subseteq\mathbb{Q}$ 是 0 的紧邻域，就包含某个 $(-\varepsilon,\varepsilon)\cap\mathbb{Q}$。包含映射把 K 送成 $\mathbb{R}$ 中的紧闭集，因而它也必须包含这段有理数的实闭包，其中有无理数，矛盾。

引理 9.4.2 (稠密子空间的开性与余部的分离)**.** Hausdorff 空间 Y 的稠密局部紧子空间 A 是开集。若 A 在 Hausdorff 空间 Y 中稠密，连续映射 $f:Y\to Z$ 在其上的限制 $f|_A$ 是嵌入，则 $f(Y\setminus A)\cap f(A)=\varnothing$。

证明. 取 $a\in A$ 在 A 中的紧邻域 K，再取 Y 中的开集 U，使 $a\in U$ 且 $U\cap A\subseteq K$。由于 K 在 Y 中闭，且 A 稠密，故 $U\subseteq\overline{U\cap A}\subseteq K\subseteq A$。对第二个结论，假设 $f(a)=f(y)$，其中 $a\in A, y\notin A$。取 Y 中分别包含这两点的不交开集 U,V。由嵌入性质，可取开集 $W\subseteq Z$ 使 $f(a)\in W$ 且 $W\cap f(A)=f(U\cap A)$。于是 $V\cap f^{-1}(W)$ 是 y 的邻域，由稠密性它与 A 相交。交点的像属于 $f(U\cap A)$，这与映射在 A 上单射以及 U,V 不交矛盾。 □

设 X 是非紧的局部紧 Hausdorff 空间，令 $\alpha X = X \cup \{\infty\}$。怎样规定新点的邻域？如果 ∞ 表示 “离开原空间的每一块紧集”，其基本邻域就应是 $\alpha X \setminus K$，其中 $K \subseteq X$ 紧。同时保留 X 的原有开集。有限个紧集的并仍紧，所以两个这样的基本邻域的交仍是同一形式；与 X 中开集相交时，紧集在 Hausdorff 空间中闭，所得交也是原空间的开集。任意并的检验则利用紧集的闭子集仍紧。这些集合确实给出一个拓扑，并且不改变 X 的子空间拓扑。任一开覆盖中，含 ∞ 的成员具有紧补集；再取有限个成员覆盖此补集，就得到有限子覆盖。因此 αX 紧。为分离 x 和 ∞，取 x 的紧邻域 K，使用不交开集 $\operatorname{int} K$ 和 $\alpha X \setminus K$ 即可。因为 X 不紧，不可能由某个紧集 K 覆盖整个 X，所以 ∞ 的每个基本邻域都与 X 相交。这说明 X 稠密，所得空间确实是一个紧化，称为单点紧化或 Alexandroff 紧化。非紧假设用在这一步：若 X 已经紧，以上拓扑会使 $\{\infty\}$ 开，新添点不在 X 的闭包中。

现在可以比较它与其他 Hausdorff 紧化。

定理 9.4.3 (最小 Hausdorff 紧化)**.** 对非紧 Hausdorff 空间 X，下列条件等价：它局部紧；它存在最小 Hausdorff 紧化；它是 Tychonoff 空间且在每个 Hausdorff 紧化中都是开集；它是 Tychonoff 空间且在 βX 中是开集；它同胚于某个紧 Hausdorff 空间的开子空间。此时最小紧化就是 αX。

证明. 设 X 局部紧，(Y, c) 是其 Hausdorff 紧化。由引理 9.4.2，$c(X)$ 是开集。定义 $q : Y \to \alpha X$，使 $q(c(x)) = x$ 且 $q(Y \setminus c(X)) = \{\infty\}$。开集 $U \subseteq X$ 的原像为 $c(U)$，在 Y 中开；$\alpha X \setminus K$ 的原像为 $Y \setminus c(K)$，也开。因此 q 连续，且下图交换：

$$\begin{array}{ccc} X & \xhookrightarrow{c} & Y \\ & \searrow^{p_X} & \downarrow q \\ & & \alpha X. \end{array} \tag{9.4.1}$$

这说明 αX 最小。

反过来，假定最小紧化 Y_0 存在。我们要证明它的余部只有一点；这样 X 就是紧 Hausdorff 空间的开子空间，所需局部紧性便会随之而来。若余部有不同两点 a, b，令 $Z = Y_0 \setminus \{a, b\}$。这是紧 Hausdorff 空间的开子空间，因而局部紧。它包含稠密的 X，所以在 Y_0 中也稠密；若它紧，就在 Y_0 中闭，只能等于 Y_0，矛盾。因此 Z 非紧，可以作单点紧化。于是 αZ 也是 X 的紧化，由最小性存在到 Y_0 的比较映射：

$$\begin{array}{ccccc} X & \xhookrightarrow{j} & Z & \xhookrightarrow{p_Z} & \alpha Z \\ & \searrow^{c_0} & \downarrow i & \swarrow_{f} & \\ & & Y_0 & & \end{array} \tag{9.4.2}$$

由稠密性有 $fp_Z = i$，且 f 满射。但 αZ 新添的一个点不可能同时映到 a, b，矛盾。将 Y_0 的余部记为 $\{\infty\}$。对任一紧化 Y，固定 X 的比较映射 $q : Y \to Y_0$ 由引理 9.4.2 将整个余部映到 ∞。于是 $X = Y \setminus q^{-1}(\infty)$ 是开集。特别地，它在 βX 中开；而紧 Hausdorff 空间的开子空间局部紧，其余蕴涵随即成立。 □

若 X 本身紧且 Hausdorff，则它唯一的 Hausdorff 紧化就是自身。例如 $\alpha(0,1)$ 是圆周，$\alpha\mathbb{R} \cong S^1$，$\alpha\mathbb{R}^2 \cong S^2$。$\mathbb{R}$ 中的序列趋于 ∞，当且仅当它最终离开每个紧区间，也就是 $|x_n| \to \infty$。

9.4.1 核紧性

单点紧化需要 Hausdorff 条件。若转向任意拓扑空间，真正构造一个紧邻域有时过于严格，但它在开覆盖论证中的作用还可以单独保留下来。具体地，若 $x \in V \subseteq K \subseteq U$ 且 K 紧，则每当开集族覆盖 U，其中有限个便足以覆盖 V。后续函数空间的论证只会用到这一有限覆盖结论，并不需要事先找到 K。因此我们直接把 V 相对于 U 的这个性质作为研究对象。

定义 9.4.4 (相对紧包含与核紧性)**.** 设 $C \subseteq U$，其中 U 开。若 U 的任一由 X 中开集组成的覆盖都有有限个成员覆盖 C，则记为 $C \ll U$。若对每个开集中的点 $x \in U$，都存在开邻域 V 使 $x \in V \ll U$，则称空间核紧。

我们称 $C \ll U$ 为 C 相对于 U 紧。它比较的是两个集合，而不是只描述 C 自身；一般不能将它理解为 $\overline{C}$ 紧。等价地，每当非空定向开集族 $\mathcal{D}$ 的并包含 U，其中就有一个成员包含 C。正向先取有限子覆盖，再用定向性找共同上界；反向则把任意覆盖改成所有有限子族的并，由此得到所需有限子覆盖。

后面会反复使用两条简单规则：若 $C' \subseteq C \ll U \subseteq U'$，则 $C' \ll U'$；若有限多个 $C_i \ll U$，则 $\bigcup_i C_i \ll U$，因为可以把相应有限子覆盖合在一起。特别地，若 $C \subseteq K \subseteq U$ 且 K 紧，则 $C \ll U$。所以局部紧空间都是核紧的。

这一关系的重要性质是可以插入一个中间开集。

引理 9.4.5 (插值性质)**.** 在核紧空间中，若 $C \ll U$，则存在开集 W，使 $C \ll W \ll U$。

证明. 我们要找的 W 既要对 U 足够小，又要能够有限地控制 C。为此，在 U 中的每一点连续使用两次核紧性，选开集

$$x \in V_x \ll W_x \ll U.$$

这些 V_x 覆盖 U，而 $C \ll U$，故有限多个 $V_{x_1}, \dots, V_{x_m}$ 覆盖 C。令 $W = \bigcup_{i=1}^{m} W_{x_i}$。由有限并规则，$W \ll U$；每个 $V_{x_i} \ll W$，所以它们的并相对于 W 紧，再缩小左端便得 $C \ll W$。 □

对 sober 空间，核紧性与局部紧性实际上一致。证明的关键，是将适当的开邻域族转化为紧集。

定理 9.4.6 (sober 空间中的局部紧性)**.** sober 空间核紧当且仅当它局部紧。进一步，空间 X 核紧当且仅当其 sober 化 $s(X)$ 局部紧。

证明. 只须证明 sober 空间中的核紧性能够产出真正的紧邻域。给定 $x \in U$，先取 $x \in V \ll U$。利用插值性质，取 $V \ll V_0 \ll U$，再递归取

$$V \ll V_{n+1} \ll V_n \qquad (n \geq 0).$$

这些开集从外向内缩小，但都包含同一个 x 的邻域 V。我们希望它们的交是紧的。为便于处理任意开覆盖，不只保留这列开集，而是取它们生成的开集滤子

$$\mathcal{H} = \{W \in \mathcal{O}(X) : \text{存在} n,\ V_n \subseteq W\}, \qquad K = \bigcap \mathcal{H}.$$

于是 $x \in V \subseteq K \subseteq U$，只剩下证明 K 紧。开集族 $\mathcal{H}$ 向上封闭，且对有限交封闭。若若干开集的并属于 $\mathcal{H}$，则某个有限子并也属于它：这些开集覆盖某个 V_n，再利用 $V_{n+1} \ll V_n$ 即可。

我们断言：若开集 W 满足 $K \subseteq W$，则 $W \in \mathcal{H}$。否则，由 Zorn 引理可取不属于 $\mathcal{H}$ 的极大开集 $G \supseteq W$；上面的有限子并性质保证链的并仍不属于该族。其补集 F 非空，因为 $X \in \mathcal{H}$，所以 $G \neq X$。它还是不可约闭集：若 $F = F_1 \cup F_2$，其中 F_1, F_2 都是 F 的真闭子集，则 $G = (X \setminus F_1) \cap (X \setminus F_2)$。两侧开集都严格包含 G，极大性迫使它们属于 $\mathcal{H}$，有限交封闭性又迫使 $G \in \mathcal{H}$，矛盾。这正是使用 sober 性的地方：不可约闭集 F 必有一个泛点 z，即 $F = \overline{\{z\}}$。$\mathcal{H}$ 的每个成员 H 都与 F 相交，否则 $H \subseteq G$。开集只要与 $\overline{\{z\}}$ 相交，就必包含 z，故 $z \in K \subseteq W \subseteq G$，矛盾。现在，$K$ 的任一开覆盖的并都属于 $\mathcal{H}$；有限子并性质给出有限子覆盖。因此 K 就是所需的紧邻域。

最后考虑任意空间 X。其 sober 化并不改变开集格：映射

$$U \longmapsto \{F \in s(X) : F \cap U \neq \varnothing\}$$

给出保任意并与有限交的序同构 $\mathcal{O}(X) \cong \mathcal{O}(s(X))$。有限交之所以被保持，正是因为点 $F \in s(X)$ 是不可约闭集：它分别与两个开集相交，就与它们的交相交。利用 $\ll$ 的定向开覆盖刻画，核紧性可沿此同构双向传递。又因为 $s(X)$ 是 sober 空间，第一部分即给出结论。 □

9.5 拓扑完备性

完备度量空间中的 Cauchy 序列不会“走出空间”。但同一个拓扑可以由不同度量给出，其中一个度量可能完备，另一个却不完备。例如 $(0,1)$ 的通常度量不完备，而它通过 $x \mapsto \tan(\pi(x - 1/2))$ 同胚于 $\mathbb{R}$；把实数直线的完备度量拉回来，就得到区间上的另一个相容完备度量。所以真正只依赖拓扑的问题是：有没有至少一个相容度量是完备的？这一性质还将与空间在紧化中能否表示成可数个开集的交发生联系。

定义 9.5.1 (拓扑完备与 Čech 完备)**.** 若空间存在相容的完备度量，则称它拓扑完备。G_δ 集指可数个开集的交；F_σ 集指可数个闭集的并。若一个空间能够嵌入为某个紧 Hausdorff 空间的 G_δ 子集，则称它 Čech 完备。

闭子空间继承原来的完备度量。开子空间却不能直接这样处理，开区间已经给出反例。我们需要调整度量，使趋近边界的序列不再是 Cauchy 序列。设 d 是 X 上的相容完备度量，$U \subseteq X$ 开，$F = X \setminus U$ 非空。一个直接的办法是增加坐标 $1/d(x, F)$：越靠近边界，该坐标越大。考虑映射

$$U \longrightarrow X \times \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto \big(x, 1/d(x, F)\big)$$

它是嵌入，因为第一坐标就是原点 x；其像还闭。事实上，若图像中一列点收敛到 (x, t)，而 $x \in F$，则 $d(x_n, F) \to 0$，第二坐标不可能收敛到有限的 t。因此 $x \in U$，连续性再给出 $t = 1/d(x, F)$，极限仍在图像中。$X \times \mathbb{R}$ 上的度量 $d(x, y) + |s - t|$ 完备，所以该闭图像以及与它同胚的 U 都拓扑完备。若 $F = \varnothing$，无需改动原度量。

同一思路也适用于可数乘积。若每个 d_n 完备，使用命题 6.2.2 中的有界乘积度量

$$D(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\min\{1,d_n(x_n,y_n)\}.$$

D-Cauchy 序列在每个坐标上都是 Cauchy 序列，因此有逐坐标极限；给定误差，先使级数尾项小，再处理有限个首项，便得到关于 D 的收敛。所以可数乘积仍拓扑完备。

在度量空间中，拓扑完备子空间恰好与可数个开集的交联系起来。

定理 9.5.2 (度量空间中的 G_δ 判别法)**.** 拓扑完备空间的每个 G_δ 子空间都拓扑完备。反之，任一可度量化空间中的拓扑完备子空间都是 G_δ 集。

证明. 设 $A=\bigcap_n U_n$，其中各 U_n 开。开子空间的结论已经解决单个条件 $x\in U_n$；现在把可数多个条件分别放入乘积坐标。对角映射 $a\mapsto(a,a,\dots)$ 把 A 嵌入 $\prod_n U_n$，其像恰是所有坐标相等的点集。原空间 Hausdorff，所以任意两个坐标相等是闭条件，所有这些条件的交仍闭。每个 U_n 拓扑完备，故乘积及其闭对角子空间拓扑完备。

反过来，设 d 是整体空间的相容度量，ρ 是 A 上的相容完备度量。我们要用整体空间中的开集逐步逼近 A，并保证任何留下来的点都能由一个 ρ-Cauchy 序列逼近。由于两个度量在 A 上给出相同拓扑，对每个 $a\in A$ 可选 $0<\delta(a,n)<1/n$，使

$$b\in A,\ d(a,b)<\delta(a,n)\quad\Longrightarrow\quad\rho(a,b)<1/n.$$

注意半径可以随 a 改变，我们没有假定两个度量一致等价。令

$$U_n=\bigcup_{a\in A}B_d(a,\delta(a,n)/2).$$

每个 U_n 都开，且 $A\subseteq\bigcap_n U_n$。若 y 属于右侧交集，则可选 a_n 使 $d(y,a_n)<\delta(a_n,n)/2$。于是 $a_n\to y$ 关于 d 成立，且

$$d(a_n,a_m)<\tfrac12\delta(a_n,n)+\tfrac12\delta(a_m,m)\le\max\{\delta(a_n,n),\delta(a_m,m)\}.$$

选较大半径所对应的中心来使用前面的蕴涵：若 $\delta(a_n,n)\ge\delta(a_m,m)$，则 $\rho(a_n,a_m)<1/n$；反之得到小于 $1/m$。所以总有 $\rho(a_n,a_m)<\max\{1/n,1/m\}$。这也说明为何刚才把开球半径取为 $\delta(a,n)/2$。因此 (a_n) 是 ρ-Cauchy 序列，在 A 中收敛。由于两个度量在 A 上给出相同拓扑，其 d-极限也必为同一点，故 $y\in A$。 □

9.5.1 紧化中的完备性

Čech 完备性的定义使用某个紧化，但这一性质与紧化的具体选择无关。

引理 9.5.3 (Čech 完备性与紧化选择无关)**.** 对 Tychonoff 空间 X，下列条件等价：X 是 Čech 完备的；X 是 βX 中的 G_δ 集；X 在每个 Hausdorff 紧化中都是 G_δ 集；只要 X 是某个 Tychonoff 空间的稠密子空间，它在其中就是 G_δ 集。

证明. 先设 X 是紧 Hausdorff 空间 K 中的 G_δ 集。将 K 换为 $\overline{X}$，这个表示仍成立，且 K 成为 X 的紧化。以下把嵌入像与 X 本身等同。比较映射不会把余部中的点送回 X，这是引理 9.4.2 的第二个结论；它保证我们可以准确追踪整个余部，而不只是某个包含关系。由引理 9.4.2，泛映射 $q:\beta X\to K$ 满足 $q^{-1}(X)=X$，取原像即得第二个条件。

若 $\beta X \setminus X = \bigcup_n F_n$，其中 F_n 闭，而 Y 是任一紧化，则泛满射 q 仍将余部与 X 分开。所以 $Y \setminus X = \bigcup_n q(F_n)$；每个 $q(F_n)$ 都是紧闭集，故这是 F_σ 集。若 X 在 Tychonoff 空间 Y 中稠密，则它也在 βY 中稠密；将其在后者中的 G_δ 表示与 Y 相交，即得第四个条件。将第四个条件用于 βX，又得反向蕴涵。 □

下面将这一紧化性质与完备度量联系起来。

定理 9.5.4 (Čech 完备性定理)**.** 一个空间拓扑完备，当且仅当它可度量化且 Čech 完备。

证明. 先设 (X, d) 完备。可度量化空间为 Tychonoff 空间，因此可将 X 看作 βX 的稠密子空间。我们想在紧化中用“越来越小的原空间邻域”筛掉全部余部点。对每个 $x \in X, n \geq 1$，选开集 $U_{x,n} \subseteq \beta X$ 使 $U_{x,n} \cap X = B_d(x, 1/n)$。我们断言 $X = \bigcap_n \bigcup_x U_{x,n}$。显然 X 包含于右端。若 z 位于右端，取它在 βX 中的全部邻域与 X 的迹；稠密性保证这些迹非空，且它们生成一个滤子 $\mathcal{F}$。对每个 n，z 位于某个 $U_{x,n}$ 中，故 $\mathcal{F}$ 包含 $B_d(x, 1/n)$ 这样一个直径至多 $2/n$ 的成员。我们称具有任意小直径成员的滤子为 Cauchy 滤子。

为什么完备度量空间中的 Cauchy 滤子收敛？选直径趋于零的滤子成员，并逐次取有限交，得到递减的非空集 A_n，其中 $\operatorname{diam} A_n \to 0$。取 $a_n \in A_n$；递减性使充分靠后的 a_n, a_m 同属一个很小的 A_N，所以 (a_n) 是 Cauchy 序列，有极限 $a \in X$。又因 A_n 的直径趋零且其中有 $a_n \to a$，每个 a 的球都包含某个 A_n。故该球属于 $\mathcal{F}$，即 $\mathcal{F} \to a$。因此迹滤子 $\mathcal{F}$ 收敛于 $a \in X$；由包含映射连续，它在 βX 中的像也收敛于 a。另一方面，迹滤子的定义保证这个像包含 z 的全部邻域，所以它也收敛于 z。由 Hausdorff 性得 $z = a \in X$。这就证明了 X 的 Čech 完备性。反之，对可度量化的 Čech 完备空间 X，任取相容度量并作度量完备化。它是该完备化的稠密子空间，且由引理 9.5.3，在其中为 G_δ 集。定理 9.5.2 因而给出 X 上的相容完备度量。 □

在度量证明中，Baire 性来自逐步缩小的闭球与完备性；在紧 Hausdorff 证明中，则来自递减闭集族与紧性。现在 X 位于紧空间中，又由可数个开条件刻画，我们可以在每一步既缩小邻域，又满足一个新的开条件，从而把两种证明合到一起。

命题 9.5.5 (Čech 完备空间的 Baire 性)**.** 每个 Čech 完备空间都是 Baire 空间。

证明. 在紧 Hausdorff 空间 K 中写成 $X = \bigcap_n W_n$，并将 K 换为 $\overline{X}$，使 X 稠密。设 G_n 在 X 中开且稠密，写成 $G_n = X \cap H_n$，其中 H_n 在 K 中开。任取 X 的非空开子集 $X \cap V_0$。第 n 步要同时做到两件事：落入待证明稠密的 G_n，并满足定义 X 的第 n 个条件 W_n。因此递归选择 K 中的非空开集 V_n，使 $V_n \cap X \neq \varnothing$ 且

$$\overline{V_n} \subseteq V_{n-1} \cap H_n \cap W_n.$$

这可由 G_n 在 X 中的稠密性和 K 的正则性保证。由紧性，$\bigcap_n \overline{V_n}$ 中有一点；它属于 $V_0 \cap X \cap \bigcap_n G_n$。因此每个这样的非空开子集都与 G_n 的交相交，Baire 性得证。 □

9.5.2 拓扑性质的比较

下面将前面反复比较的性质放在同一张表中。+ 表示该性质总被保持，− 表示一般未必保持；它不表示每个具体例子都会失去该性质。“连续像” 三列均要求映射连续且满，后两列分别再要求映射为开映射或闭映射。“子空间” 三列分别指任意子空间、开子空间和闭子空间；最后三列分别指有限、可数和任意乘积。局部紧沿用定义 9.4.1 的紧邻域基约定，分离公理沿用前文约定。涉及连通、道路连通时，空间及所讨论的子空间按前文约定取非空，乘积的因子也取非空；有限乘积允许零个因子，此时结果为单点空间。表中记录的是一般情况；加入额外条件，例如某些紧性与局部紧性的论证中的 Hausdorff 条件，可能改变结论。查表时仍须回到相应定理，确认实际使用的假设。

	连续像			子空间			乘积		
性质	连续	开	闭	任意	开	闭	有限	可数	任意
T_0	−	−	−	+	+	+	+	+	+
T_1	−	−	+	+	+	+	+	+	+
T_2	−	−	−	+	+	+	+	+	+
T_3	−	−	−	+	+	+	+	+	+
Tychonoff	−	−	−	+	+	+	+	+	+
T_4	−	−	+	−	−	+	−	−	−
第一可数	−	+	−	+	+	+	+	+	−
第二可数	−	+	−	+	+	+	+	+	−
可分	+	+	+	−	+	−	+	+	−
紧	+	+	+	−	−	+	+	+	+
局部紧	−	+	−	−	+	+	+	−	−
可数紧	+	+	+	−	−	+	−	−	−
序列紧	+	+	+	−	−	+	+	+	−
连通	+	+	+	−	−	−	+	+	+
局部连通	−	+	+	−	+	−	+	−	−
道路连通	+	+	+	−	−	−	+	+	+
可度量化	−	−	−	+	+	+	+	+	−
拓扑完备	−	−	−	−	+	+	+	+	−
Baire	−	+	−	−	+	−	−	−	−

表 9.1: 拓扑性质的保持性。

第十章

函数空间

到目前为止，我们一直把连续函数当作研究空间的工具。现在把函数本身作为点，问一族函数怎样才算接近、怎样才算连续变化。逐点收敛只逐个观察定义域中的点，一致收敛则同时控制所有点；紧子集给出了介于两者之间的自然尺度。我们先用它研究实函数的逼近，再把定义推广到一般值域，最终回到一个具体问题：二元连续映射 $h(z,x)$ 何时等价于连续地依赖参数 z 的函数族？

10.1 紧收敛拓扑与 Stone–Weierstrass 定理

先考虑 $[0,1]$ 上的函数列 $f_n(x)=x^n$。对每个固定的 $x<1$，它趋于 0；在 $x=1$ 处却始终等于 1。逐点看，每个位置都有极限；把这些极限合成一个函数，却失去了连续性。问题在于，靠近 1 的变化越来越集中，单独固定一个点看不到这种现象。若要求在整个定义域上一致接近，就能控制这一问题，但在非紧空间上这个要求又常常太强。例如 $f_n(x)=x/n$ 在每个有界区间上一致趋于 0，在整个 $\mathbb{R}$ 上却不一致收敛。于是我们考虑折中的要求：在每个紧子集上分别一致接近。用 $\mathbb{R}^X$ 表示 X 上全体实函数组成的集合，用 $C(X)$ 表示其中的连续函数。对 $A\subseteq X$、$r>0$ 及 $f\in\mathbb{R}^X$，令

$$B_A(f,r)=\{g\in\mathbb{R}^X:\sup_{x\in A}|f(x)-g(x)|<r\},\qquad B_A^*(f,r)=B_A(f,r)\cap C(X).$$

当 $A=\varnothing$ 时，约定上确界为 0。

定义 10.1.1 (逐点、一致与紧收敛拓扑)**.** $\mathbb{R}^X$ 上的逐点收敛拓扑就是乘积拓扑。一致收敛拓扑以 $B_X(f,r)$ 为基。紧收敛拓扑以 $B_K(f,r)$ 为基，其中 K 为紧集。$C(X)$ 上的同名拓扑分别指相应的子空间拓扑。

这些“球”未必来自一个处处有限的距离：对任意实函数，$\sup_X|f-g|$ 可能为无穷大，但小于给定 r 的条件仍然有意义。为检验紧收敛球构成拓扑基，设 $h\in B_{K_1}(f,r)\cap B_{K_2}(g,s)$。两条不等式都有正的余量，取 ε 小于这两个余量，由三角不等式便有

$$B_{K_1\cup K_2}(h,\varepsilon)\subseteq B_{K_1}(f,r)\cap B_{K_2}(g,s).$$

有限个紧集的并仍紧，故这样的球足以处理有限交。一致收敛球的验证相同。由定义还可直接比较三种拓扑：

$$\text{逐点收敛拓扑}\ \subseteq\ \text{紧收敛拓扑}\ \subseteq\ \text{一致收敛拓扑}.$$

第一个包含关系利用单点集的紧性，第二个利用 $B_X(f,r)\subseteq B_K(f,r)$。若 X 紧，则后两个拓扑相同。因此，网依紧收敛拓扑收敛，当且仅当它在每个紧子集上一致收敛。开头的 x^n 说明逐点收敛不保持连续性。一致收敛则保持连续性：若连续函数网 f_d 一致趋

于 f，固定 x 与 $\varepsilon>0$，先选一个指标使 $\sup_X|f-f_d|<\varepsilon/3$，再利用这个 f_d 在 x 处连续。对充分接近 x 的 y，

$$|f(y)-f(x)|\le|f(y)-f_d(y)|+|f_d(y)-f_d(x)|+|f_d(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

紧收敛只在各个紧集上给出这种估计，因此还要问：在每个紧子集上连续，是否足以推出在整个空间连续？

把这个要求先用于开集，就得到下面的定义。

定义 10.1.2 (紧生成空间与 k-空间)**.** 若只要 $U\subseteq X$ 与每个紧集 $K\subseteq X$ 的交 $U\cap K$ 在 K 中开，就能推出它在 X 中开，则称该空间是紧生成的。本笔记称紧生成的 Hausdorff 空间为 k-空间。

这个定义把开性的检验交给紧子集。在局部紧空间中，它确实足够：若 $U\cap K$ 对每个紧集 K 都相对开，固定 $x\in U$，取 x 的紧邻域 K。可写 $U\cap K=O\cap K$，其中 O 在母空间中开；于是 $O\cap\operatorname{int}K$ 是包含 x 且包含于 U 的开集。所以局部紧空间紧生成。第一可数空间也紧生成，但它采用的是另一种紧集：由收敛序列与极限组成的集合。具体地，取补集 $F=X\setminus U$。若 $x_n\in F$ 收敛于 x，则 $K=\{x\}\cup\{x_n:n\ge1\}$ 紧。假设保证 $F\cap K$ 在 K 中闭，而 (x_n) 全在其中，故 $x\in F\cap K$。这说明 F 序列闭；第一可数性使序列闭集就是闭集，因而 U 开。由紧生成空间出发的映射连续，当且仅当它在每个紧子集上的限制连续；将定义用于开集的原像即可。现在回到函数极限。若 X 紧生成，连续函数网按紧收敛拓扑趋于 f，则在每个紧子集 K 上，$f|_K$ 都是连续函数的一致极限，故连续。紧生成性再把这些局部检验合在一起，给出 f 连续。因此 $C(X)$ 在赋予紧收敛拓扑的 $\mathbb{R}^X$ 中闭。在实区间中，每个紧子集都包含在该区间内某个紧子区间中，所以只检验紧子区间即可。这就回到了分析中熟悉的局部一致极限定理。

10.1.1 从代数结构到一致逼近

多项式为什么有可能逼近任意连续函数？我们先不使用它的具体幂次形式，只观察能够进行的操作：常数可调整高度，加法与数乘可作线性组合，乘法允许进一步组合，而函数 x 能区分区间中的不同点。Stone–Weierstrass 定理说明，这些条件已足够。证明不直接猜一列逼近多项式，而是先解决两点插值，再设法把许多局部控制拼成对一个紧集的统一控制。

定理 10.1.3 (Stone–Weierstrass)**.** 设 $P\subseteq C(X)$ 包含所有常值函数，对加法与乘法封闭，并能分离 X 中的任意两个不同点。则 P 在赋予紧收敛拓扑的 $C(X)$ 中稠密。特别地，若 X 紧，则每个连续实函数都是 P 中函数的一致极限。

两点插值容易用线性组合做到，难处在于一个插值函数可能在别处偏离目标很远。若能取最小值，就能保留多个函数各自较小的一段；若能取最大值，又能把各处足够大的部分合起来。我们因此先证明：虽然原代数未必对最大、最小值封闭，其闭包却有这一性质。由 $\max(f,g)=(f+g+|f-g|)/2$，问题归结为能否逼近绝对值；再由 $|t|=\sqrt{t^2}$，只须先构造平方根的多项式逼近。下面的递推式从下方逐步修正误差，不预先使用待证的逼近定理。

引理 10.1.4 (平方根函数的多项式逼近)**.** 多项式 $p_0(t)=0$ 及 $p_{n+1}(t)=p_n(t)+\frac{1}{2}(t-p_n(t)^2)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 $\sqrt{t}$。

证明. 若当前 $p_n(t)$ 位于 0 与 $\sqrt{t}$ 之间，差值 $t-p_n(t)^2$ 非负，加入它的一半可以把近似值向上推。还要确保这一步不会越过 $\sqrt{t}$。事实上，

$$\sqrt{t}-p_{n+1}(t)=(\sqrt{t}-p_n(t))\left(1-\tfrac{1}{2}(\sqrt{t}+p_n(t))\right)\geq 0.$$

右侧第二个因子在 $[0,1]$ 上非负，因而从 $p_0=0$ 出发，归纳得到 $0\leq p_n(t)\leq\sqrt{t}$。递推增量非负，所以 $p_n(t)$ 递增，有逐点极限 $l(t)$。在递推式中取极限得到 $l=l+(t-l^2)/2$，结合非负性即有 $l=\sqrt{t}$。对 $\varepsilon>0$，开集 $\{t:\sqrt{t}-p_n(t)<\varepsilon\}$ 递增并覆盖 $[0,1]$。由紧性，其中某一个就等于整个区间，故为一致收敛。这正是 Dini 定理的一个特例；同一论证适用于紧空间上以连续函数为极限的任意单调连续函数列。 □

在赋予紧收敛拓扑的 $C(X)$ 中令 $\mathcal{A}=\overline{P}$。加法和乘法在此拓扑下连续：对固定的紧集 K，有

$$\|fg-uv\|_K\leq\|f\|_K\|g-v\|_K+\|v\|_K\|f-u\|_K,\qquad \|h\|_K=\sup_K|h|.$$

当逼近函数足够接近 g 时，$\|v\|_K$ 有界。因此 $\mathcal{A}$ 仍是包含常数且分离点的代数。固定 $f\in\mathcal{A}$。要证明 $|f|\in\mathcal{A}$，只须对每个紧集 K 和误差要求找到 $\mathcal{A}$ 中的一个近似。取 $M>0$ 使 $|f|\leq M$ 在 K 上成立，则

$$Mp_n\big((f/M)^2\big)\longrightarrow|f|\quad\text{在}K\text{上一致成立.}$$

左侧是 f 的多项式，属于 $\mathcal{A}$。因此 $|f|$ 的每个紧收敛邻域都与闭集 $\mathcal{A}$ 相交，故 $|f|\in\mathcal{A}$。这里的 M 和 n 可以随 K 改变，并未声称在整个 X 上一致逼近。再由恒等式

$$\max(f,g)=\tfrac{1}{2}(f+g+|f-g|),\qquad \min(f,g)=\tfrac{1}{2}(f+g-|f-g|)$$

可知 $\mathcal{A}$ 对取有限个函数的最大值与最小值封闭。

定理 10.1.3 的证明. 固定 $f\in C(X)$、紧集 K 及 $\varepsilon>0$。若 $K=\varnothing$，无需逼近；以下设它非空。我们将先得到处处不太高的函数，再把它们合成处处不太低的函数。对 $a,b\in K$，先找 $h_{a,b}\in\mathcal{A}$，使它在这两点与 f 一致。若 $a\neq b$，先取 $u\in P$ 使 $u(a)\neq u(b)$，再令

$$h_{a,b}=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{u(b)-u(a)}(u-u(a));$$

若 $a=b$，则使用常值函数 $f(a)$。固定 b，让 a 变化。因为 $h_{a,b}(a)=f(a)$，开集 $\{x:h_{a,b}(x)<f(x)+\varepsilon/2\}$ 包含 a，这些开集覆盖 K。取有限子覆盖，将对应的 $h_{a,b}$ 取逐点最小值得到 g_b。这样在 K 的每一点，至少有一项小于 $f+\varepsilon/2$，所以 $g_b<f+\varepsilon/2$。同时所有这些函数在 b 处都等于 $f(b)$，故 $g_b(b)=f(b)$。第一次有限拼合保持了一个精确插值点，同时控制住整个 K 上的上界。

现在让 b 变化。由连续性和 $g_b(b)=f(b)$，开集 $\{x:g_b(x)>f(x)-\varepsilon/2\}$ 覆盖 K。再取有限子覆盖，并将相应 g_b 取逐点最大值得到 $g\in\mathcal{A}$。这次每一点至少有一项高于下界，而全部项都仍低于刚才的上界。则在 K 上有 $|f-g|<\varepsilon/2$，因而 $\|f-g\|_K\leq\varepsilon/2<\varepsilon$。故 $\mathcal{A}$ 在 $C(X)$ 中稠密。由于它又是闭集，必等于 $C(X)$，从而 P 稠密。 □

在 $[a,b]$ 上，实多项式代数包含常数并能分离点，故每个连续函数均可由多项式一致逼近。这就是经典的 Weierstrass 逼近定理。

10.2 紧开拓扑

实函数的紧收敛用到了数值之差。若值域只是一般拓扑空间 Y，我们还能表达怎样的接近要求？先固定一块紧集 $K \subseteq X$，以及包含 $f(K)$ 的开集 $U \subseteq Y$；要求附近的函数也把 K 送入 U，便不再需要距离。用 $[X,Y]$ 表示连续映射 $X \to Y$ 全体所成的集合。以下拓扑定义允许空空间；涉及用常值函数嵌入 Y，以及由此得到的分离性等价时，明确假定 $X \neq \varnothing$，并按本节通常情形取 $Y \neq \varnothing$。

定义 10.2.1 (紧开拓扑与点开拓扑)**.** 对紧集 $K \subseteq X$ 及开集 $U \subseteq Y$，令 $S(K,U) = \{f \in [X,Y] : f(K) \subseteq U\}$。这些集合组成 $[X,Y]$ 上紧开拓扑的子基。若只使用 $K = \{x\}$，则所得拓扑称为点开拓扑。

点开拓扑就是从 Y^X 继承的子空间拓扑，因此其中网的收敛就是逐点收敛。它粗于紧开拓扑。先看看函数空间是否还保留着值域本身。设 $X \neq \varnothing$，令 $j(y)$ 为常值函数 $x \mapsto y$。对非空 K，有 $j^{-1}S(K,U) = U$；对空 K 则为整个 Y，因此 j 连续。固定 $x_0 \in X$，计值映射 $e_{x_0}(f) = f(x_0)$ 对点开、紧开拓扑都连续，且 $e_{x_0}j = \mathrm{id}_Y$。所以 j 是嵌入。若 Y Hausdorff，常值函数组成的子集还闭：它是所有条件 $f(x) = f(x')$ 的交，而每个条件都是由连续计值映射拉回 $Y \times Y$ 中的闭对角线。

对实值连续函数，新的定义恰好给出紧收敛拓扑。

定理 10.2.2 (实函数上的紧开拓扑与紧收敛一致)**.** $C(X) = [X,\mathbb{R}]$ 上的紧开拓扑与紧收敛拓扑相同。

证明. 设 $f(K) \subseteq U$，其中 K 紧而 $U \subseteq \mathbb{R}$ 开。由 $f(K)$ 紧，存在 $\varepsilon > 0$，使其 ε-邻域包含于 U，故 $B^*_K(f,\varepsilon) \subseteq S(K,U)$。反过来，要用有限多个紧开条件保证 g 在 K 上与 f 一致接近。办法是把 K 划到有限块中，使 f 在每一块上变化很小，再限制 g 也靠近该块的一个参考值。若 $K = \varnothing$，对应邻域就是整个函数空间。否则选 $x_1,\dots,x_m \in K$，使开集 $\{x \in K : |f(x) - f(x_i)| < \varepsilon/4\}$ 覆盖 K，并令

$$K_i = \{x \in K : |f(x) - f(x_i)| \le \varepsilon/4\}, \qquad U_i = (f(x_i) - \varepsilon/2,\, f(x_i) + \varepsilon/2).$$

各 K_i 是紧集 K 的闭子集，故紧；它们覆盖 K，且 $f \in \bigcap_i S(K_i,U_i)$。采用闭的 K_i 是为了得到真正的紧开子基元，采用稍大的 U_i 则为扰动后的函数留出余量。此交集中的每个 g 在 K 上都满足 $|g(x) - f(x)| < 3\varepsilon/4$，所以交集包含于 $B^*_K(f,\varepsilon)$。这两方面的邻域比较说明两个拓扑相同。 □

10.2.1 将开集看作函数

为了进一步比较函数空间拓扑，我们先选择最简单、却仍能读出开集的值域。设 $\mathbf{2}$ 为 Sierpiński 空间，其开集为 $\varnothing, \{1\}, \{0,1\}$。一个映射 $f : X \to \mathbf{2}$ 是否连续，只须检查 $f^{-1}(1)$ 是否开。因此，X 的每个开集 U 恰好对应一个连续特征函数 $\mathbf{1}_U$。注意若值域取两点离散空间，就需要 U 同时开闭；这里特意只让 $\{1\}$ 开。因此可以将 $[X,\mathbf{2}]$ 与 $\mathcal{O}(X)$

等同。在此对应下，令

$$\mathcal{V}(K)=\{U\in\mathcal{O}(X):K\subseteq U\}.$$

集合族 $\mathcal{V}(\{x\})$ 生成点开拓扑 $\delta(\mathcal{O}(X))$；当 K 遍历紧集时，$\mathcal{V}(K)$ 生成紧开拓扑 $\gamma(\mathcal{O}(X))$。

这时，紧开条件 $\mathbf{1}_U(K)\subseteq\{1\}$ 就变成了 $K\subseteq U$。可见函数空间的邻域可以先表达成开集族中的条件。对一般值域也可以这样做：先看一个函数对 Y 中开集的逆像，再要求这个逆像属于指定的开集族。对集合族 $\mathcal{H}\subseteq\mathcal{O}(X)$ 及 $U\in\mathcal{O}(Y)$，记

$$N(\mathcal{H},U)=\{f\in[X,Y]:f^{-1}(U)\in\mathcal{H}\}.$$

命题 10.2.3 (由开集空间生成函数空间拓扑)**.** 当 $\mathcal{H}$ 在 $\delta(\mathcal{O}(X))$ 中开时，集合 $N(\mathcal{H},U)$ 生成 $[X,Y]$ 上的点开拓扑。若改为使用 $\gamma(\mathcal{O}(X))$ 中的开集，则生成紧开拓扑。

证明. 先看紧开拓扑。由 $N(\mathcal{V}(K),U)=S(K,U)$ 得到一个方向的包含。反之，设 $f^{-1}(U)\in\mathcal{H}$，且 $\mathcal{H}$ 在 $\gamma(\mathcal{O}(X))$ 中开。取紧集 $K_1,\dots,K_m$，使 $f^{-1}(U)\in\bigcap_i\mathcal{V}(K_i)\subseteq\mathcal{H}$，则 $f\in S(\bigcup_i K_i,U)\subseteq N(\mathcal{H},U)$。点开拓扑的证明相同，只需将紧集换为有限集。 □

10.2.2 函数空间的分离性

若两个函数不同，一定能在某个点处看到不同值，所以分离点的公理可以逐点从值域搬过来。正则性和完全正则性还要分离函数与一个邻域的补集，此时邻域限制的是整个紧集 K，需要把 $f(K)$ 上逐点的分离合成一次分离。

命题 10.2.4 (紧开函数空间的分离性质)**.** 设 X,Y 非空。赋予紧开拓扑的 $[X,Y]$ 满足 T_i $(i=0,1,2)$，当且仅当 Y 满足相应公理。它正则当且仅当 Y 正则，完全正则当且仅当 Y 完全正则。

证明. 必要性来自常值函数给出的嵌入，以及这些性质对子空间的遗传性。对 T_i 的充分性，在两个函数取值不同的一点，利用相应的计值映射分离它们即可。对正则性，先处理一个子基本邻域 $f\in S(K,U)$。对 $f(K)$ 的每一点，由 Y 的正则性取闭包包含于 U 的开邻域，再由紧性选有限多个，令 V 为其并。有限并的闭包等于闭包的并，所以

$$f(K)\subseteq V\subseteq\overline{V}\subseteq U.$$

集合 $M(K,\overline{V})=\bigcap_{x\in K}\{g:g(x)\in\overline{V}\}$ 是包含 $S(K,V)$ 的闭集，因此 $f\in S(K,V)\subseteq\overline{S(K,V)}\subseteq S(K,U)$。再取有限交，便可处理任意基本邻域。

对完全正则性，我们最终需要的是函数空间上的一个连续实函数。先在值域中构造 $k:Y\to[0,1]$，使其在整个 $f(K)$ 上等于 0，在 U 外等于 1；随后对 $k\circ g$ 在 K 上取上确界，就能同时检查 $g(K)$ 的全部点。若 $K=\varnothing$，$S(K,U)$ 是全空间，直接使用常零函数；以下设 K 非空。为此，对 $f(K)$ 中每一点取分离函数 k_y，使其在该点为零，在 U 外为一。有限个集合 $\{k_y<1/2\}$ 覆盖 $f(K)$。把每个相应的 k_y 改成 $\max(0,2k_y-1)$ 后，它在这块邻域上恒为零，在 U 外仍为一。再取有限个这样的函数的最小值：$f(K)$ 中每一点至少被一项压到零，而 U 外所有项均为一，所得函数正是 k。在紧开拓扑下，前后复合连续映射仍诱导连续映射：

$$[g,h]:[X,Y]\to[X',Y'],\qquad u\mapsto hug,\qquad [g,h]^{-1}S(K,U)=S(g(K),h^{-1}(U)).$$

此外，$\sup_K : [X,[0,1]] \to [0,1]$ 连续。对 $0 < a \le 1$，$[0,a)$ 的原像为 $S(K,[0,a))$：函数把 K 送进 $[0,a)$，再由紧性取到最大值，才可推出这个最大值严格小于 a。对 $0 \le a < 1$，$(a,1]$ 的原像是 $\bigcup_{x\in K} S(\{x\},(a,1])$，因为上确界大于 a 等价于某一点的取值大于 a。空集情形约定 $\sup_\varnothing = 0$。因此映射

$$F : [X,Y] \xrightarrow{[\mathrm{id}_X,k]} [X,[0,1]] \xrightarrow{\sup_K} [0,1]$$

连续，满足 $F(f) = 0$。若 $g \notin S(K,U)$，则存在 $x \in K$ 使 $g(x) \notin U$，于是 $k(g(x)) = 1$，故 $F(g) = 1$。这就把“某一点离开 U”转成了一个实函数取值为 1 的条件。对有限个子基本邻域的交，只须取相应有限个函数的最大值。这就证明了完全正则性。 □

10.3 Isbell 拓扑与可指数化空间

设 $h : Z \times X \to Y$。固定参数 z 后，得到一个函数 $h(z,-) : X \to Y$；把参数再次放开，就得到“以函数为值”的映射 $z \mapsto h(z,-)$。例如令参数 z 在 $[0,1]$ 中变化，就可以把 h 看成从函数 $h(0,-)$ 到 $h(1,-)$ 的一个连续变形；我们希望它成为函数空间中的一条道路。这在集合层面只是把两个输入分两次写：

$$h \longleftrightarrow \widehat{h}, \qquad \widehat{h}(z)(x) = h(z,x).$$

但把公式重写，并不自动保留连续性。联合连续的 h 是否给出连续的 $\widehat{h}$，取决于函数空间的开集有多少；反过来，$\widehat{h}$ 连续是否足以控制 z,x 同时变化，也需要检查。我们希望选择一个拓扑，使这两个方向同时成立。将它们先分开命名，可以看清拓扑太细或太粗分别影响哪一步。

定义 10.3.1 (分裂、联合与可指数化)**.** 固定 X,Y 及 $[X,Y]$ 上的一个拓扑。若对每个参数空间 Z，连续映射 $h : Z \times X \to Y$ 总给出连续的 $\widehat{h} : Z \to [X,Y]$，则称它为分裂拓扑。若对每个 Z，$\widehat{h} : Z \to [X,Y]$ 连续总能推出 $h(z,x) = \widehat{h}(z)(x)$ 连续，则称它为联合拓扑。若上述两个条件对每个空间 Z 都成立，则称该拓扑为满意拓扑。若对每个 Y，$[X,Y]$ 上都存在满意拓扑，则称空间 X 可指数化。

这里，从 $\widehat{h} : Z \to [X,Y]$ 出发时，它的每个值已经是 X 上的连续函数；真正需要判断的是关于 (z,x) 的联合连续性。检验联合性似乎要遍历所有参数空间，其实只须检查一个统一的操作：计值映射

$$\mathrm{ev} : [X,Y] \times X \longrightarrow Y, \qquad \mathrm{ev}(f,x) = f(x).$$

若拓扑联合，取 $Z = [X,Y]$ 与连续映射 $\widehat{h} = \mathrm{id}_{[X,Y]}$，其对应的二元映射就是 ev，故 ev 连续。反过来，任意 h 都按下图分解：先由参数选出函数，再在点 x 处计值，所以 ev 连续便足以给出联合性。

$$\begin{array}{ccc} Z \times X & \xrightarrow{\widehat{h}\times \mathrm{id}_X} & [X,Y] \times X \\ & \searrow^{h} & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}} \\ & & Y. \end{array} \tag{10.3.1}$$

把函数空间拓扑变粗，映入它的连续性要求变少，因此仍保持分裂性；把拓扑变细，从它出发的计值映射更容易连续，因此仍保持联合性。还有一个更强的比较：任意分裂拓

扑 τ_s 都粗于任意联合拓扑 τ_c。事实上，用 τ_c 的联合性得到连续计值映射，再用 τ_s 的分裂性取指数伴随，所得恰是

$$\mathrm{id} : ([X,Y],\tau_c) \longrightarrow ([X,Y],\tau_s).$$

恒等映射沿这个方向连续，就意味着 $\tau_s \subseteq \tau_c$。所以满意拓扑若存在，只能有一个；我们的任务是找到这个同时满足两个要求的拓扑，并判断何时能找到。

10.3.1 Scott 拓扑与 Isbell 拓扑

命题 10.2.3 已经把函数空间的邻域写成了 $f^{-1}(U)$ 所属的开集族条件。因此可以先解决 $\mathcal{O}(X)$ 上应该取什么拓扑，再通过逆像把它传到各个 $[X,Y]$。分裂性将要求一个有限化步骤：联合连续性给出许多矩形邻域，只有选出有限多个，才能把参数方向的邻域取交后仍保持开。我们因而希望开集族的条件一旦对某个大并成立，就已对其中的某个有限子并成立。Scott 拓扑正是把这种要求与向上封闭性结合起来。

定义 10.3.2 (Scott 拓扑)**.** 设 P 为偏序集。若子集 $\mathcal{H}$ 向上封闭，且对每个存在上确界的非空定向子集 D，由 $\sup D \in \mathcal{H}$ 总能推出 $D \cap \mathcal{H} \neq \varnothing$，则称它为 Scott 开集。全体这样的集合记为 $\sigma(P)$。

也可以只用非空定向下集来检验这个条件。若从一个定向集出发，将它换成向下闭包，上确界不变；若向下闭包中的某点属于向上封闭的 $\mathcal{H}$，原定向集中位于它上方的一点也属于 $\mathcal{H}$，所以两种表述等价。Scott 开集的任意并显然仍满足条件。对有限交，若 $\sup D$ 同时属于两个 Scott 开集，分别找到 D 中的两个见证元，再用定向性取共同上界，便得到属于交集的一个见证元。因此 $\sigma(P)$ 确实是拓扑。在有序集 $\{0<1\}$ 上，它就是 Sierpiński 拓扑。

在 $\mathcal{O}(X)$ 中，上确界就是并，所以可以把定向性换成更容易直接使用的有限子并判别法：若一族开集的并属于 $\mathcal{H}$，则其中某个有限子并也属于 $\mathcal{H}$。只须把所有有限子并（包括空并）组成定向族，再应用定义；反过来，定向族中的有限多个成员又有共同上界。上一章的 $\ll$ 也由有限开覆盖定义，因而我们预期它能够描述 Scott 邻域。对 $C \subseteq X$，记

$$\Uparrow C = \{U \in \mathcal{O}(X) : C \ll U\}.$$

这里要求的不只是包含 C，还要求 C 相对于 U 有有限覆盖性质。

引理 10.3.3 (核紧空间的 Scott 拓扑基)**.** 若 X 核紧，则每个 $\Uparrow C$ 都是 Scott 开集，且 $\{\Uparrow V : V \in \mathcal{O}(X)\}$ 是 $\sigma(\mathcal{O}(X))$ 的一个基。对任意 X，有 $\gamma(\mathcal{O}(X)) \subseteq \sigma(\mathcal{O}(X))$；若 X 局部紧，则等号成立。

证明. 先验证 $\Uparrow C$ 是 Scott 开集。向上封闭性来自 $\ll$ 的单调性。若 $C \ll \bigcup D$，其中 D 为非空定向开集族，不能只找到一个包含 C 的成员，因为目标是 $C \ll U$。插值性质恰好补足这一步：先取

$$C \ll W \ll \bigcup D.$$

再由右边的 $\ll$ 找 $U \in D$ 包含 W，于是由左边的 $\ll$ 得到 $C \ll U$。接着设 $U \in \mathcal{H}$，其中 $\mathcal{H}$ Scott 开。核紧性说明 U 中的每一点都属于某个 $V \ll U$；有限并规则说明这些开集 V 组成定向族。因此它们的并为 U，Scott 开性给出其中某个 $V \in \mathcal{H}$。若 $V \ll W$，

必有 $V \subseteq W$，由 $\mathcal{H}$ 向上封闭得 $W \in \mathcal{H}$。所以 $U \in \Uparrow V \subseteq \mathcal{H}$，证明了基的断言。对任意紧集 K，$\mathcal{V}(K)$ 是 Scott 开集：由紧性，K 的定向开覆盖中必有一个成员覆盖整个紧集。因此 $\gamma \subseteq \sigma$。在局部紧空间中，我们还能把 $V \ll U$ 变成真正的紧集条件。对每个 $x \in U$，取包含于 U 的紧邻域 K_x；它们的内部覆盖 U。由 $V \ll U$，有限多个这样的内部覆盖 V，故对应紧邻域的并 K 满足 $V \subseteq K \subseteq U$。若开集 W 包含 K，则 $V \subseteq K \subseteq W$ 给出 $V \ll W$，所以

$$U \in \mathcal{V}(K) \subseteq \Uparrow V.$$

每个 Scott 基本邻域都可这样缩小到紧开邻域，于是 $\sigma \subseteq \gamma$，两种拓扑相同。 □

现在可以定义回答上述连续性问题的拓扑了。

定义 10.3.4 (Isbell 拓扑)**.** $[X, Y]$ 上的 Isbell 拓扑以集合 $N(\mathcal{H}, U) = \{f : f^{-1}(U) \in \mathcal{H}\}$ 为子基，其中 $\mathcal{H} \in \sigma(\mathcal{O}(X))$，$U \in \mathcal{O}(Y)$。

由引理 10.3.3 和命题 10.2.3，它细于紧开拓扑；当 X 局部紧时，二者相同。

现在来检验最初的两个连续性要求。分裂方向只需 Scott 开集的有限子并判别；联合方向要在 x 周围找到一个开集，使函数在这个开集上同时受到控制，这一步才会用到核紧性。

定理 10.3.5 (指数伴随保持连续性)**.** Isbell 拓扑总是分裂拓扑。若 X 核紧，则它也是联合拓扑，因而对每个 Y，它都是 $[X, Y]$ 上唯一的满意拓扑。

证明. 先设 $h : Z \times X \to Y$ 连续，且 $\widehat{h}(z) \in N(\mathcal{H}, U)$。这就是说 $\widehat{h}(z)^{-1}(U) \in \mathcal{H}$；我们要找 z 的一个邻域，使附近参数对应的逆像仍在 $\mathcal{H}$ 中。对每个 $x \in \widehat{h}(z)^{-1}(U)$，由联合连续性取开邻域 $V_x \ni z$、$W_x \ni x$，使 $h(V_x \times W_x) \subseteq U$。这些 W_x 的并就是 $\widehat{h}(z)^{-1}(U)$，因而属于 $\mathcal{H}$。如果把所有 V_x 取交，交未必开；Scott 条件正好允许先选有限个 W_x，使其并 W 已经属于 $\mathcal{H}$。只取对应有限个 V_x 的交 V，就仍是 z 的开邻域。若使用的是空子族，则 $\varnothing \in \mathcal{H}$，向上封闭性使 $N(\mathcal{H}, U)$ 为整个函数空间，此时直接取 $V = Z$。对 $v \in V$，有 $W \subseteq \widehat{h}(v)^{-1}(U)$，故 $\widehat{h}(v) \in N(\mathcal{H}, U)$，这就证明了分裂性。

再设 X 核紧。为证联合性，只须证计值映射连续。给定 $f(x) \in U$，取开集 V 使 $x \in V \ll f^{-1}(U)$。由引理 10.3.3，$N(\Uparrow V, U)$ 是 f 的开邻域。其中每个 g 都满足 $V \ll g^{-1}(U)$，特别地 $V \subseteq g^{-1}(U)$。所以当函数在这个邻域中变化、点在 V 中变化时，所有 $g(y)$ 都仍位于 U。即

$$\mathrm{ev}\big(N(\Uparrow V, U) \times V\big) \subseteq U,$$

这给出了计值映射的连续性。 □

特别地，当 X 局部紧时，熟悉的紧开拓扑满足指数律

$$[Z \times X, Y] \;\cong\; [Z, [X, Y]]$$

这里的 $\cong$ 表示两类连续映射之间的自然一一对应：h 与 $\widehat{h}$ 的连续性等价。我们此处只作集合层面的断言，并未再给上式两端赋予函数空间拓扑，也没有额外声称它们是某种拓扑下的同胚。

10.3.2 核紧性为何必要

我们已经知道核紧性足够。若只假定满意拓扑存在，为什么定义域一定核紧？由于开集就是 Sierpiński 值连续函数，最关键的计值条件变成了 “x 属于 U”。令

$$E = \{(U, x) \in \mathcal{O}(X) \times X : x \in U\}.$$

若这个关系是开集，就能在每个 (U, x) 周围找到一个矩形 $\mathcal{H} \times V$，使其中每个开集都包含整个 V。这正是从单个包含关系提取一个稳定的小邻域的过程。

引理 10.3.6 (核紧性与开集归属关系)**.** 空间 X 核紧，当且仅当开集归属关系 E 在乘积空间 $(\mathcal{O}(X), \sigma(\mathcal{O}(X))) \times X$ 中是开集。

证明. 若 $x \in V \ll U$，则矩形 $(\Uparrow V) \times V$ 是 E 内包含 (U, x) 的开邻域。反之，在 E 内选取 (U, x) 的矩形邻域 $\mathcal{H} \times V$，其中 $\mathcal{H}$ 是 Scott 开集。于是对每个 $W \in \mathcal{H}$，都有 $V \subseteq W$。若一个定向开集族覆盖 U，则其并属于 $\mathcal{H}$，所以某个成员属于 $\mathcal{H}$，因而包含 V。这就是说 $V \ll U$，故空间核紧。 □

只知道某个满意拓扑存在，还不能直接把它认作 $\mathcal{O}(X)$ 上的 Scott 拓扑。我们改用商映射作为中介：如果连续性可以通过函数空间来检验，就可以先沿商映射下降参数，再回到二元映射，这将保证乘积保持商映射。反过来，我们会把 Scott 拓扑写成一族较容易处理的拓扑的共同终拓扑。在每个较细拓扑下，E 的开性都能直接验证；利用乘积保持商映射，便可以把这些开性下降到 Scott 拓扑。这样就避免了在尚未知道核紧时直接假定 E 开。

定理 10.3.7 (可指数化空间的刻画)**.** 对任意空间 X，下列条件等价：X 核紧；X 可指数化；对每个商映射 $q : Y \to Z$，乘积映射 $q \times \mathrm{id}_X : Y \times X \to Z \times X$ 都是商映射。

证明. 定理 10.3.5 已证明第一个蕴涵。设 X 可指数化。要证明 $q \times \mathrm{id}_X$ 是商映射，我们用出发映射的连续性判别：设 $h : Z \times X \to W$ 是集合映射，且 $h(q \times \mathrm{id}_X)$ 连续，目标是证明 h 连续。因为 q 满，对任意固定的 z 都可以取 y 使 $q(y) = z$。于是 $h(z, -) = h(q(y), -)$ 是一个连续切片，所以 $\widehat{h}$ 的值确实属于 $[X, W]$。在 $[X, W]$ 上使用满意拓扑。上述复合映射的指数伴随为 $\widehat{h}q$，所以它连续；由商映射的判别法，$\widehat{h}$ 连续；再由指数律，h 连续。这里使用的映射组成如下两个交换方块：

$$\begin{array}{ccc} Y \times X & \xrightarrow{q \times \mathrm{id}_X} & Z \times X \\ {\scriptstyle h(q\times \mathrm{id}_X)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ W & = & W \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\quad q \quad} & Z \\ {\scriptstyle \widehat{hq}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \widehat{h}} \\ [X, W] & = & [X, W]. \end{array} \tag{10.3.2}$$

取 $W = \mathbf{2}$ 并使用 $Z \times X$ 的子集的特征函数，就能由此映射判别法得到商拓扑的开集判别法。

最后，假定与 X 取乘积保持所有商映射。我们要构造的商映射以 Scott 开集空间为值域，因此先把它的开性条件拆开。Scott 开性要求对每个定向族都通过检验。先只固定一个非空定向下集 $D \subseteq \mathcal{O}(X)$，并在 $\mathcal{O}(X)$ 上赋予拓扑

$$\tau_D = \{\mathcal{H} : \mathcal{H} \text{ 向上封闭，且} \bigcup D \in \mathcal{H} \Rightarrow D \cap \mathcal{H} \neq \varnothing\}.$$

这是一个拓扑：任意并的检验可在其中一个成员内完成，有限交则用 D 的定向性合并各自的见证元。每个 Scott 开集都通过这个单独检验，而一个集合族若通过全部这样的检验，便是 Scott 开集。因此

$$\sigma(\mathcal{O}(X)) = \bigcap_D \tau_D.$$

这族拓扑各自只负责一个定向族，故可以直接构造开矩形。归属关系 E 是 $(\mathcal{O}(X), \tau_D) \times X$ 中的开集。固定 $x \in U$。若 $U \nsubseteq \bigcup D$，则向上集 $\uparrow U = \{W : U \subseteq W\}$ 不含 $\bigcup D$，所以 τ_D 定义中的额外条件自动满足；于是 $(\uparrow U) \times U$ 就是包含于 E 的开矩形。若 $U \subseteq \bigcup D$，则因 $x \in U$，可找 $W \in D$ 包含 x，令 $V = U \cap W$。此时 $x \in V \subseteq U$，且 $W \in D \cap \uparrow V$，所以 $\uparrow V$ 通过 τ_D 的检验，是开集。于是 $(\uparrow V) \times V$ 是包含 (U, x) 且包含于 E 的开矩形。两种情形合起来，证明 E 在每个 τ_D 对应的乘积中都开。

取所有 $(\mathcal{O}(X), \tau_D)$ 的拓扑和；其中的一个子集开，当且仅当它与每个分支的交都开。令 p 在每个分支上都是恒等映射，即

$$p : \coprod_D (\mathcal{O}(X), \tau_D) \longrightarrow (\mathcal{O}(X), \sigma(\mathcal{O}(X))),$$

它满射，而且 $p^{-1}(\mathcal{H})$ 开，当且仅当 $\mathcal{H}$ 在每一个 τ_D 中开，也当且仅当 $\mathcal{H}$ 是 Scott 开集，所以 p 是商映射。按假设，$p \times \mathrm{id}_X$ 也是商映射。拓扑和与固定空间取乘积后仍按各分支分开，其定义域就是各个 $(\mathcal{O}(X), \tau_D) \times X$ 的拓扑和。在每一分支上，E 的原像已经证明为开，因此整个原像开。现在才使用商映射把这一开性降到目标空间：E 在 $(\mathcal{O}(X), \sigma(\mathcal{O}(X))) \times X$ 中开。由引理 10.3.6，X 核紧，最后一个蕴涵得证。 □

回到熟悉的 Hausdorff 情形，Hausdorff 空间都是 sober 的，因而定理 9.4.6 将核紧性变成局部紧性。于是 Hausdorff 空间可指数化，当且仅当它局部紧，也当且仅当以它为因子取乘积保持所有商映射。此时满意拓扑就是紧开拓扑。最初的问题因此有了具体答案：当定义域局部紧且 Hausdorff 时，连续函数可以作为函数空间中的点，参数化的联合连续性恰好由紧开拓扑来描述。

常用条件与结论速查

下表将常用判定与构造条件集中列出，引用指向正文中的定义、定理或相应小节。各行的附加假设只作用于该行。

一、闭包、连续性与映射构造

目标	判定或充分条件	条件与正文位置
判定 $x \in \overline{A}$	x 的每个邻域与 A 相交；等价于存在 A 中的网收敛到 x。	任意拓扑空间。定理 4.4.2。
判定 $f : X \to Y$ 连续	开集逆像开；等价于闭集逆像闭，也等价于保持所有网的极限。	任意拓扑空间。定理 4.2.2、4.4.2。
改用序列判定	闭包可用序列极限刻画；保持序列极限可判定映射连续。	定义域第一可数时适用；一般空间应使用网。第 4.4 节。
证明是同胚	连续双射且为开映射或闭映射；特别地，从紧空间到 Hausdorff 空间的连续双射是同胚。	紧性在定义域，Hausdorff 性在陪域。定理 5.2.4。
映入子空间	$f : Z \to A \subseteq X$ 连续，当且仅当包含映射 $i : A \hookrightarrow X$ 与它的复合 if 连续。	A 取子空间拓扑。命题 4.2.3。
映入乘积	$f : Z \to \prod_i X_i$ 连续，当且仅当每个坐标映射 $p_i f$ 连续。	乘积取乘积拓扑。第 6.2 节。
从商空间出发	若 $q : X \to Q$ 为商映射，则 $g : Q \to Y$ 连续，当且仅当 gq 连续。	若由 $f : X \to Y$ 定义 g，还需 f 在每条纤维上常值。第 6.3 节。
证明是商映射	连续开满射或连续闭满射，都是商映射。	开性、闭性均只是充分条件；满射不可省。命题 6.3.2。
判定商空间 Hausdorff	对紧 Hausdorff 空间 X 的等价关系 E，X/E 为 Hausdorff 空间，当且仅当 $E \subseteq X \times X$ 闭。	此时商空间也紧。定理 6.3.5。

二、紧性、分离性与可数性

目标	判定或可用结论	条件与正文位置
一般空间的紧性	开覆盖有有限子覆盖；具有有限交性质的闭集族有非空交；每个网有收敛子网；每个超滤收敛。这些条件等价。	不预设 Hausdorff 性。定理 5.1.2、5.1.3、9.1.4。
度量空间的紧性	紧 $\iff$ 序列紧 $\iff$ 完备且全有界。	全有界不能仅换成有界。定理 3.3.3。
欧氏子集的紧性	$K \subseteq \mathbb{R}^N$ 紧 $\iff$ K 有界且闭。	N 有限，取通常拓扑。定理 5.1.4。
序列紧与紧	第二可数空间中，紧、序列紧与可数紧等价。一般紧空间未必序列紧。	定理 5.1.5；反例 6.2.5。
紧性的保持	闭子空间、连续像与任意乘积保持紧性；Hausdorff 空间的紧子集闭。	任意乘积使用选择公理。第 5.1、5.2 节及定理 6.2.4。
Hausdorff 性	不同点有不交邻域 $\iff$ 每个网至多有一个极限。紧 Hausdorff 性等价于每个超滤恰有一个极限。	命题 5.2.2、定理 9.1.4。
紧性与分离性配合	紧 Hausdorff 空间正规且为 Baire 空间；其连续实函数取得最值（空间非空时）。	定理 5.3.2、5.3.6、5.1.4。
可数性之间的关系	第二可数 $\Rightarrow$ 第一可数且可分；度量空间总第一可数，且可分 $\iff$ 第二可数。	一般空间中不能仅由可分推出第二可数。定理 4.3.6。
分离公理的关系	$T_4 \Rightarrow$ Tychonoff $\Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$。	正则、正规本身不含 T_1。定义 5.3.1、9.2.1。

三、连通性、函数分离与可度量化

目标	判定或可用结论	条件与正文位置
连通性的判定	非空空间连通，当且仅当仅有 $\varnothing, X$ 两个开闭集。道路连通蕴含连通，逆命题一般不成立。	定义 7.1.1、7.2.1；反例 7.2.2。
构造连通集	连续像、闭包和任意乘积保持连通性；有非空公共交的非空连通集族，其并连通。	连通空间按约定非空。命题 7.1.2、定理 7.1.3。
局部连通性	X 局部连通 $\iff$ 有连通开集基 $\iff$ 每个开子空间的连通分支都在 X 中开。	不能仅检查整个 X 的连通分支。命题 7.1.5。
用函数分离闭集	正规空间中，任意两个不交闭集 A, B 可由连续函数 $f : X \to [0,1]$ 分离：$f\|_A = 0$、$f\|_B = 1$。	Urysohn 引理 8.1.2。
延拓连续实函数	正规空间 X 的闭子集 M 上，每个连续实函数都可连续延拓到 X；取值于 $[-1,1]$ 时可保持此范围。	闭子集与正规性是此定理的假设。定理 8.1.4。
Urysohn 可度量化	第二可数且正则 T_0，足以推出可度量化，并可嵌入 $[0,1]^{\mathbb{N}}$。	这是充分条件；一般可度量化空间未必第二可数。定理 8.2.2。
Nagata–Smirnov 判定	可度量化 $\iff$ 正则 Hausdorff 且有 σ-局部有限基。	基是可数个局部有限族的并，不要求每一族可数。定理 8.2.6。
连通流形可度量化	对连通 N 维流形（$N \geq 1$），可度量化 $\iff$ 第二可数 $\iff$ 有可数紧子集覆盖。	流形定义本身不含第二可数性。定理 8.2.7。
识别 Cantor 集	非空、无孤立点的零维紧度量空间与 Cantor 集同胚。	零维指有开闭集基。定理 7.1.9。

四、紧化、完备性与函数空间

目标	判定或可用结论	条件与正文位置
Hausdorff 紧化存在	X 有 Hausdorff 紧化 $\iff$ X 为 Tychonoff 空间 $\iff$ X 可嵌入某个 $[0,1]^I$。	定理 9.2.3。
Stone–Čech 延拓	Tychonoff 空间 X 到紧 Hausdorff 空间 Y 的连续映射，唯一连续延拓到 βX。	值域的紧性与 Hausdorff 性均在假设中。定理 9.3.1。
单点紧化	非紧 Hausdorff 空间 X 局部紧，当且仅当它有最小 Hausdorff 紧化；此紧化为 αX。	定理 9.4.3。
拓扑完备性	可度量化空间拓扑完备，当且仅当它 Čech 完备。拓扑完备空间的 G_δ 子空间仍拓扑完备。	指存在相容完备度量，不是每个相容度量都完备。定理 9.5.4、9.5.2。
Baire 性质	完备度量空间、紧 Hausdorff 空间与 Čech 完备空间都是 Baire 空间。	均为充分条件。定理 3.2.7、5.3.6及命题 9.5.5。
检验函数连续	若 X 紧生成，则 $f: X \to Y$ 连续，当且仅当每个紧子集上的限制连续。局部紧或第一可数足以保证紧生成。	Hausdorff 且紧生成时称为 k-空间。第 10.1 节。
$C(X)$ 上的拓扑	逐点收敛拓扑 $\subseteq$ 紧收敛拓扑 $=$ 紧开拓扑 $\subseteq$ 一致收敛拓扑；X 紧时后三者相同。	此行讨论连续实函数。第 10.1 节、定理 10.2.2。
Stone–Weierstrass 逼近	$P \subseteq C(X)$ 包含所有常函数，对加法、乘法封闭且分离点，则 P 在紧收敛拓扑下稠密；X 紧时为一致逼近。	定理 10.1.3。
可指数化	X 核紧 $\iff$ X 可指数化 $\iff$ 与 X 作乘积保持所有商映射。核紧时 Isbell 拓扑是满意拓扑。	定理 10.3.7、10.3.5。

各拓扑性质在子空间、连续像及乘积下的保持性，另见表 9.1。